Ejercicio 1 *Formalizar las siguientes sentencias, usando los símbolos: Minimal(x,y), que representa "x es un elemento minimal de y", P(x,y) que representa "x pertenece a yz M(x,y) que representa "x es menor y".*

- *Un elemento minimal de un Y es un elemento de Y tal que no hay ningún elemento en Y menor que él.*
- *Los elementos minimales no son comparables.*

Solución:

- $\forall Y \forall m(M(m,A) \leftrightarrow P(m,Y) \wedge \neg \exists x(P(x,Y) \wedge M(x,m))$
- $\forall A \forall x \forall y(M(x,A) \wedge M(y,A) \rightarrow \neg M(x,y) \wedge \neg M(y,x)$

Ejercicio 2 *Justificar razonadamente si las fórmulas $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$ y $(\exists x P(x)) \rightarrow (\exists x Q(x))$ son lógicamente equivalentes.*

Solución:

La fórmulas no son válidas, un contraejemplo se obtiene eligiendo el universo $U = \{a,b\}$ y las interpretaciones $I(P) = \{a\}$ e $I(Q) = \emptyset$. En efecto,

- $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$ es verdadera, ya que se verifica para b.
- $(\exists x P(x)) \rightarrow (\exists x Q(x))$ es falsa, ya que $\exists x P(x)$ es verdadera (se cumple para a) y $\exists x Q(x)$ es falsa.

Ejercicio 3 *Usar tableros semánticos para clasificar la fórmula siguiente en insatisfacible, contingente o tautología, proporcionando las interpretaciones necesarias que lo justifiquen.*

$$(\neg p \vee (q \wedge r)) \rightarrow ((p \vee q) \wedge r)$$

Solución:

Para ver si es insatisfacible se construye el siguiente tablero

$$\begin{array}{lll} 1. & \neg((\neg p \vee (q \wedge r)) \rightarrow ((p \vee q) \wedge r)) & \\ 2. & \neg p \vee (q \wedge r) & (1) \\ 3. & \neg((p \vee q) \wedge r) & (1) \end{array}$$

4. $\neg p$ (2) | 7. $q \wedge r$ (2)

5. $\neg\neg(p \vee q)$ (3) | 6. $\neg r$ (3)

Abierta $\{\neg p, \neg r\}$

Por tanto, la fórmula no es una tautología y un contramodelo es I con $I(p) = 0, I(r) = 0$.
Para ver si es satisfacible se construye el siguiente tablero

$1.\ (\neg p \vee (q \wedge r)) \to ((p \vee q) \wedge r)$

$2.\ \neg(\neg p \vee (q \wedge r))\ \ (1)$ $\qquad$ $5.\ (p \vee q) \wedge r\ \ (1)$

$3.\ \neg\neg p\ \ (2)$ $\qquad$ $4.\ \neg(q \wedge r)\ \ (2)$
$4.\ \neg(q \wedge r)\ \ (2)$
$5.\ p\ \ (3)$

$6.\ \neg q\ \ (4)$ $\qquad$ $7.\ \neg r\ \ (4)$
Abierta $\{p, \neg q\}$

Por tanto, la fórmula es satisfacible y un ramodelo es I con $I(p) = 1, I(q) = 0$.
En conclusión. la fórmula es contingente.

Ejercicio 4 *Decidir, por resolución, si el conjunto siguiente es consistente:*

$$S = \{ \ \neg(\exists x \exists y Q(x,y)),\ \forall x \exists y (P(x) \to Q(x,y)),\ \exists x \exists z \exists y (\neg Q(x,y) \to P(z)) \}$$

En caso de serlo, dar una interpretación que lo justifique.

Solución:

En primer lugar se calculan la cláusulas

- Fórmula 1:
$$\begin{array}{ll} & \neg(\exists x \exists y Q(x,y)) \\ \equiv & \forall x \forall y \neg Q(x,y) \\ \equiv & \{\neg Q(x,y)\} \end{array}$$
- Fórmula 2:
$$\begin{array}{ll} & \forall x \exists y (P(x) \to Q(x,y)) \\ \equiv & \forall x \exists y (\neg P(x) \vee Q(x,y)) \\ \approx & \forall x (\neg P(x) \vee Q(x, f(x))) \\ \equiv & \{\neg P(x), Q(x, f(x))\} \end{array}$$
- Fórmula 3:

$$
\begin{array}{ll}
& \exists x \exists z \exists y(\neg Q(x,y) \to P(z)) \\
\equiv & \exists x \exists z \exists y(\neg\neg Q(x,y) \lor P(z)) \\
\equiv & \exists x \exists z \exists y(Q(x,y) \lor P(z)) \\
\approx & \exists z \exists y(Q(a,y) \lor P(z)) \\
\approx & \exists y(Q(a,y) \lor P(b)) \\
\approx & Q(a,c) \lor P(b) \\
\equiv & \{Q(a,c), P(b)\}
\end{array}
$$

La resolución es

$$
\begin{array}{lll}
1 & \{\neg Q(x,y)\} & \text{Premisa} \\
2 & \{\neg P(x), Q(x, f(x))\} & \text{Premisa} \\
3 & \{Q(a,c), P(b)\} & \text{Premisa} \\
4 & \{P(b)\} & \text{Res. 1,3 } [x/a, y/c] \\
5 & \{Q(b, f(b))\} & \text{Res. 2,4 } [x/b] \\
4 & \square & \text{Res. 1,5 } [x/b, y/f(b)]
\end{array}
$$

Por tanto, el conjunto es inconsistente.

Ejercicio 5 *En el laboratorio.*

Ejercicio 6 *En el laboratorio.*