
Ejercicio 1 Formalizar las siguientes sentencias, usando los símbolos: $Minimal(x,y)$, que representa "x es un elemento minimal de y", $P(x,y)$ que representa "x pertenece a y" y $M(x,y)$ que representa "x es menor y".

- Un elemento minimal de un Y es un elemento de Y tal que no hay ningún elemento en Y menor que él.
- Los elementos minimales no son comparables.

Solución:

- $\forall Y \forall m (M(m, Y) \leftrightarrow P(m, Y) \wedge \neg \exists x (P(x, Y) \wedge M(x, m)))$
- $\forall A \forall x \forall y (M(x, A) \wedge M(y, A) \rightarrow \neg M(x, y) \wedge \neg M(y, x))$

Ejercicio 2 Justificar razonadamente si las fórmulas $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$ y $(\exists x P(x)) \rightarrow (\exists x Q(x))$ son lógicamente equivalentes.

Solución:

La fórmulas no son válidas, un contraejemplo se obtiene eligiendo el universo $U = \{a, b\}$ y las interpretaciones $I(P) = \{a\}$ e $I(Q) = \emptyset$. En efecto,

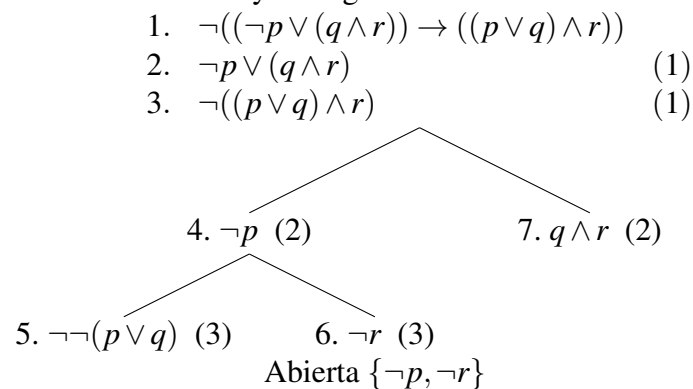
- $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$ es verdadera, ya que se verifica para b .
- $(\exists x P(x)) \rightarrow (\exists x Q(x))$ es falsa, ya que $\exists x P(x)$ es verdadera (se cumple para a) y $\exists x Q(x)$ es falsa.

Ejercicio 3 Usar tableros semánticos para clasificar la fórmula siguiente en insatisfacible, contingente o tautología, proporcionando las interpretaciones necesarias que lo justifiquen.

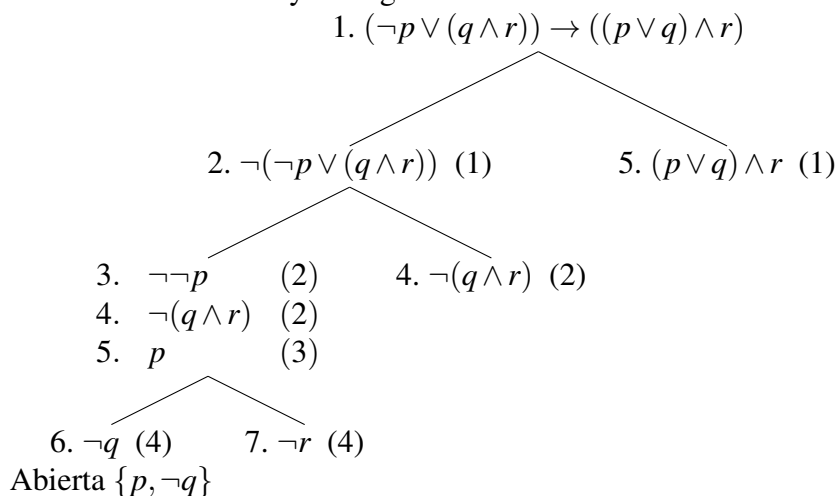
$$(\neg p \vee (q \wedge r)) \rightarrow ((p \vee q) \wedge r)$$

Solución:

Para ver si es insatisfacible se construye el siguiente tablero



Por tanto, la fórmula no es una tautología y un contramodelo es I con $I(p) = 0, I(r) = 0$.
 Para ver si es satisfacible se construye el siguiente tablero



Por tanto, la fórmula es satisfacible y un ramodelo es I con $I(p) = 1, I(q) = 0$.
 En conclusión, la fórmula es contingente.

Ejercicio 4 Decidir, por resolución, si el conjunto siguiente es consistente:

$$\begin{aligned}
 S = \{ & \neg(\exists x \exists y Q(x, y)), \\
 & \forall x \exists y (P(x) \rightarrow Q(x, y)), \\
 & \exists x \exists z \exists y (\neg Q(x, y) \rightarrow P(z))\}
 \end{aligned}$$

En caso de serlo, dar una interpretación que lo justifique.

Solución:

En primer lugar se calculan la cláusulas

■ Fórmula 1:

$$\begin{aligned}
 & \neg(\exists x \exists y Q(x, y)) \\
 \equiv & \forall x \forall y \neg Q(x, y) \\
 \equiv & \{-Q(x, y)\}
 \end{aligned}$$

■ Fórmula 2:

$$\begin{aligned}
 & \forall x \exists y (P(x) \rightarrow Q(x, y)) \\
 \equiv & \forall x \exists y (\neg P(x) \vee Q(x, y)) \\
 \approx & \forall x (\neg P(x) \vee Q(x, f(x))) \\
 \equiv & \{-P(x), Q(x, f(x))\}
 \end{aligned}$$

■ Fórmula 3:

$$\begin{aligned}
& \exists x \exists z \exists y (\neg Q(x, y) \rightarrow P(z)) \\
\equiv & \exists x \exists z \exists y (\neg \neg Q(x, y) \vee P(z)) \\
\equiv & \exists x \exists z \exists y (Q(x, y) \vee P(z)) \\
\approx & \exists z \exists y (Q(a, y) \vee P(z)) \\
\approx & \exists y (Q(a, y) \vee P(b)) \\
\approx & Q(a, c) \vee P(b) \\
\equiv & \{Q(a, c), P(b)\}
\end{aligned}$$

La resolución es

- | | | |
|---|-----------------------------|--------------------------|
| 1 | $\{\neg Q(x, y)\}$ | Premisa |
| 2 | $\{\neg P(x), Q(x, f(x))\}$ | Premisa |
| 3 | $\{Q(a, c), P(b)\}$ | Premisa |
| 4 | $\{P(b)\}$ | Res. 1,3 $[x/a, y/c]$ |
| 5 | $\{Q(b, f(b))\}$ | Res. 2,4 $[x/b]$ |
| 4 | \square | Res. 1,5 $[x/b, y/f(b)]$ |

Por tanto, el conjunto es inconsistente.

Ejercicio 5 *En el laboratorio.*

Ejercicio 6 *En el laboratorio.*
