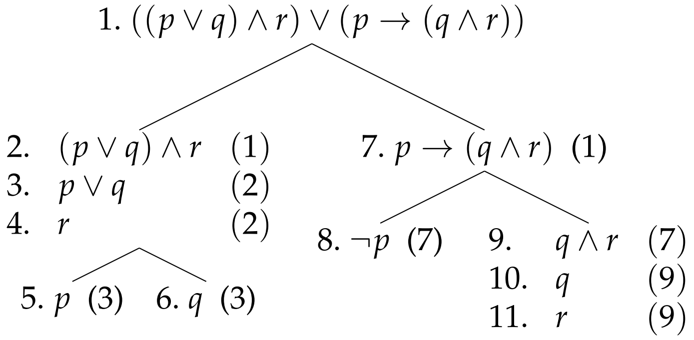

Ejercicio 1 [2 puntos] *Sea F la fórmula* $((p \lor q) \land r) \lor (p \to (q \land r))$.

1. *Obtener un tablero semántico completo de la fórmula F.*
2. *A partir del apartado anterior, si F es satisfacible y si F es una tautología.*
3. *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*
   a) *Si una fórmula tiene un tablero semántico completo con todas sus ramas abiertas, entonces dicha fórmula es una tautología.*
   b) *Si una fórmula es una tautología, entonces todos sus tablero semánticos completos tienen todas las ramas abiertas.*

Solución:

Solución del apartado 1: El tablero semántico completo de F es



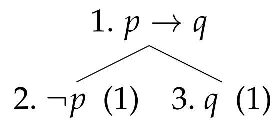
Solución del apartado 2: La fórmula es F satisfacible y algunos de sus modelos son

p	q	r
1	$*$	1
$*$	1	1
0	$*$	$*$
$*$	1	1

La fórmula es F no es una tautología y algunos de sus contramodelos son

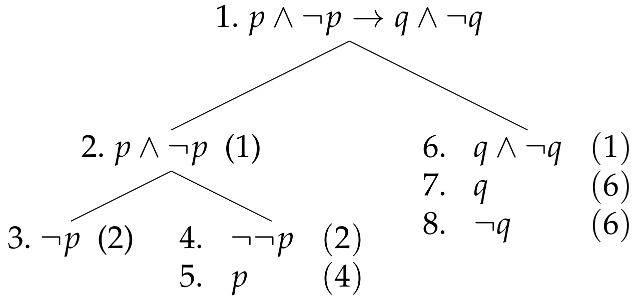
p	q	r
1	$*$	0

Solución del apartado 3: Es falso. Por ejemplo, la fórmula $p \to q$ no es una tautología y su tablero completo tiene todas sus ramas abiertas:



Solución del apartado 4: Es falso. Por ejemplo, la fórmula $F = p \land \neg p \to q \land \neg q$ es una tautología que tiene una rama cerrada.

Es fácil ver que es una tautología, ya que su consecuente es una contradicción.
El tablero completo de F es



La rama de la derecha es cerrada.

Ejercicio 2 [2 puntos] *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Existe una fórmula F sin el signo de igualdad tal que todos sus modelos tienen al menos tres elementos.*
2. *Si S es un conjunto consistente de fórmulas y F es una fórmula satisfacible, entonces $S \cup \{F\}$ es consistente.*
3. *Si $F \in S$ y S es inconsistente, entonces $S - \{F\}$ es inconsistente.*
4. *Si S es inconsistente y $F \in S$ es una tautología, entonces $S - F$ es inconsistente.*

Solución:

Solución del apartado 1: Es cierto. Por ejemplo, la fórmula

$$(P(a) \land \neg P(b) \land \neg P(c)) \land (\neg Q(a) \land Q(b) \land \neg Q(c)) \land (\neg R(a) \land \neg R(b) \land R(c))$$

Solución del apartado 2: Es falso, un contraejemplo es $S = \{p\}$ y $F = \neg p$

Solución del apartado 3: Es falso. Por ejemplo, sean F la fórmula p y S el conjunto de fórmulas $\{p, \neg p\}$. Entontes S es inconsistente, pero $S - \{F\} = \{\neg p\}$ es consistente.

Solución del apartado 4: Es cierto. Se demuuestra por reducción al absurdo.

Supongamos que $S - \{F\}$ es consistente. Entonces tiene algún modelo I. Puesto que F es una tautología, I es modelo de F y, por tanto de $(S - \{F\}) \cup \{F\} = S$.

Ejercicio 3 [2 puntos]

1. *Decidir, usando el método de resolución, si la fórmula $\exists y Q(y, y)$ es consecuencia lógica de $\forall x \exists y Q(x, y)$ y, en el caso de que no lo sea, construir un contramodelo a partir de la resolución.*
2. *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*
    a) *Existe un conjunto de fórmulas S tal que la resolución a partir de S nunca termina.*

b) *Si la cláusula E es una resolvente de las cláusulas C y D, entonces E es distinta de C y D.*

Solución:

Apartado 1 Para decidirlo, en primer lugar se calcula la forma clausal de $\forall x \exists y Q(x,y)$

$$\begin{array}{rl} & \forall x \exists y Q(x,y) \\ \approx & \forall x Q(x,f(x)) \\ \equiv & \{\{Q(x,f(x))\}\} \end{array}$$

A continuación se calcula la forma clausal de $\neg\exists y Q(y,y)$

$$\begin{array}{rl} & \neg\exists y Q(y,y) \\ \approx & \forall y \neg Q(y,y) \\ \equiv & \{\{Q(y,y))\}\} \end{array}$$

Puesto que que los literales $Q(x,f(x))$ y $Q(y,y)$ no son unificables no se produce ninguna resolvente y, por tanto, no se alcanza la cláusula vacía.

Un contramodelo es la interpretación I con universo $\{f^n(a) | n \in \mathbb{N}\}$ e $I(Q) = \{((f^n, f^{n+1}(a) | n \in \mathbb{N}\}$

Apartado 2.a Es cierto. Por ejemplo,

$$S = \{N(0), \forall x(N(x) \to N(s(x))\}$$

es consistente ya que la interpretación I con universo los números naturales y tal que

- $I(N) = \mathbb{N}$
- $I(0) = 0$
- $I(s) = \{(x, x+1) : x \in \mathbb{N}\}$

es un modelo de S.

Por otra parte, la forma clausal de S es

$$\begin{array}{ll} N(0) & \equiv \{\{N(0\}\} \\ \forall x(N(x) \to N(s(x)) & \equiv \{\{\neg N(x), N(s(x)\}\} \end{array}$$

La resolución es

1	$\{N(0\}$	Premisa
2	$\{\neg N(x), N(s(x)\}$	Premisa
3	$\{N(s(0)\}$	Resolvente de 1 y 2
4	$\{N(s(s(0))\}$	Resolvente de 1 y 3
5	$\{N(s(s(s(0)))\}$	Resolvente de 1 y 2
	$\ldots$	

Apartado 2.b Es falso. Por ejemplo, sean $C = \{p, \neg p\}$ y $D = C$. Entonces C es una resolvente de C y D.

Ejercicio 4 [2 puntos] *Demostrar, mediante deducción natural, que el siguiente conjunto de fórmulas es inconsistente:*

$$\{((p \rightarrow q) \vee r) \rightarrow p, \neg p\}$$

Solución:

Ejercicio 5 [3 puntos] *Demostrar, mediante deducción natural, que* $\exists x(Q(x) \wedge \neg P(x))$ *es consecuencia lógica del conjunto* $\{\neg\exists x(P(x) \wedge C(x)), \exists x(C(x) \wedge Q(x))\}$

Solución:

Pdte.