Tema 2: Lógica proposicional

José A. Alonso Jiménez
Miguel A. Gutiérrez Naranjo

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Sevilla

Introducción

- **Necesidad de lenguajes formales:**
  - Complejidad del lenguaje natural
  - Ambigüedad del lenguaje natural
- **Elementos de una lógica:**
  - Sintaxis: ¿qué expresiones son fórmulas?
  - Semántica: ¿qué significa que una fórmula F es consecuencia de un conjunto de fórmulas S?: $S \models F$
  - Cálculo: ¿qué significa que una fórmual F puede deducirse a partir de un conjunto de fórmulas S?: $S \vdash F$
- **Propiedades:**
  - Potencia expresiva
  - Adecuación: $S \vdash F \Longrightarrow S \models F$
  - Completitud: $S \models F \Longrightarrow S \vdash F$
  - Decidibilidad
  - Complejidad

Sintaxis de la lógica proposicional

- **Alfabeto proposicional:**
  - símbolos proposicionales (p.e. corre, es_rumiante)
  - conectivas lógicas:
$\neg$ (negación),
$\wedge$ (conjunción),
$\vee$ (disyunción),
$\rightarrow$ (condicional),
$\leftrightarrow$ (equivalencia).
  - símbolos auxiliares: "(" y ")".
- **Fórmulas proposicionales:**
  - símbolos proposicionales
  - $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$
- **Ejemplos de fórmulas proposicionales:**
  - $\neg$ rumia
  - (rumia $\wedge$ corre)
  - (duerme $\vee$ corre)
  - (duerme $\rightarrow$ $\neg$ corre)
  - (rumia $\leftrightarrow$ es_rumiante)
  - $((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$

Sintaxis de la lógica proposicional

- **Las fórmulas proposicionales como gramática libre de contexto.**
- **Eliminación de paréntesis:**
  - **Eliminación de paréntesis externos:**
    $\mathbf{rumia} \land \mathbf{corre} \iff (\mathbf{rumia} \land \mathbf{corre})$
  - **Precedencia:** $\neg, \land, \lor \rightarrow, \leftrightarrow$
    $p \land \neg q \lor r \rightarrow s \iff ((p \land \neg q) \lor r) \rightarrow s$
    $p \lor \neg q \land r \rightarrow \neg s \lor t \iff (p \lor (\neg q \land r)) \rightarrow (\neg s \lor t)$
  - **Asociatividad:** $\land$ **y** $\lor$ **asocian por la derecha**
    $p \land q \land r \iff p \land (q \land r)$
- **Metavariables:**
  - SP: **conjunto de símbolos proposicionales**
  - Prop: **conjunto de fórmulas proposicionales**
  - **Símbolos proposicionales:** $p, p_0, p_1, \dots, q, q_0, q_1, \dots$
  - **Fórmulas proposicionales:** $F, F_0, F_1, \dots, G, G_0, G_1, \dots$
- **Sintaxis en OTTER**

Usual	$\neg$	$\land$	$\lor$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
OTTER	`-`	`&`	`|`	`->`	`<->`

Semántica: Verdad e interpretación

- **Valores de verdad:**
  - **1: verdadero**
  - **0: falso**
- **Interpretaciones:**
  - **Ejemplo 1:**
    I_1(rojo_sobre_amarillo) = 1
    I_1(amarillo_sobre_morado) = 1
    I_1(amarillo_sobre_rojo) = 0
  - **Ejemplo 1:**
    I_2(rojo_sobre_amarillo) = 1
    I_2(amarillo_sobre_morado) = 1
    I_2(amarillo_sobre_rojo) = 0
  - **Def.:** $I : \mathrm{SP} \to \{0, 1\}$
  - INTERPRETACIONES: **Conjunto de todas las interpretaciones.**

Funciones de verdad

- **Funciones de verdad:**

i	$\neg i$
1	0
0	1

i	j	$i \wedge j$	$i \vee j$	$i \rightarrow j$	$i \leftrightarrow j$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

  - $\mathbf{FV}_\neg : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ **t.q.** $\mathbf{FV}_\neg(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 0; \\ 0, & \text{si } i = 1. \end{cases}$

  - $\mathbf{FV}_\wedge : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ **t.q.** $\mathbf{FV}_\wedge(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j = 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

  - $\mathbf{FV}_\vee : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ **t.q.** $\mathbf{FV}_\vee(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j = 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

  - $\mathbf{FV}_\rightarrow : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ **t.q.** $\mathbf{FV}_\rightarrow(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 1, j = 0 \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

  - $\mathbf{FV}_\leftrightarrow : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ **t.q.** $\mathbf{FV}_\leftrightarrow(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Significado de una fórmula

- **Significado: Ejemplos:** $F = (p \lor q) \land (\neg q \lor r)$
  - **Interpretación 1:** $I(p) = I(r) = 1, I(q) = 0$

$$\begin{array}{ccccccc}
(p & \lor & q) & \land & (\neg q & \lor & r) \\
(1 & \lor & 0) & \land & (\neg 0 & \lor & 1) \\
 & 1 & & \land & (1 & \lor & 1) \\
 & 1 & & \land & & 1 & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\text{sig}(F, I) = \\
&= \text{sig}((p \lor q) \land (\neg q \lor r), I) = \\
&= \text{FV}_\land(\text{sig}(p \lor q, I), \text{sig}(\neg q \lor r, I)) = \\
&= \text{FV}_\land(\text{FV}_\lor(\text{sig}(p, I), \text{sig}(q, I)), \text{FV}_\lor(\text{sig}(\neg q, I), \text{sig}(r, I))) = \\
&= \text{FV}_\land(\text{FV}_\lor(1, 0), \text{FV}_\lor(\text{FV}_\neg(\text{sig}(q, I), 1))) = \\
&= \text{FV}_\land(1, \text{FV}_\lor(\text{FV}_\neg(0), 1)) = \\
&= \text{FV}_\land(1, \text{FV}_\lor(1, 1)) = \\
&= \text{FV}_\land(1, 1) = \\
&= 1
\end{aligned}$$

  - **Interpretación 2:** $J(r) = 1, J(p) = J(q) = 0$
    $\text{sig}(F, J) = 0$

$$\begin{array}{ccccccc}
(p & \lor & q) & \land & (\neg q & \lor & r) \\
(0 & \lor & 0) & \land & (\neg 0 & \lor & 1) \\
 & 0 & & \land & (1 & \lor & 1) \\
 & 0 & & \land & & 1 & \\
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

Significado de una fórmula

- **Significado: Definición:**
  sig : $\textsc{Prop} \times \textsc{Interpretaciones} \to \{0,1\}$
  - $\mathrm{sig}(p, I) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \text{ pertenece a } I \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$
  - $\mathrm{sig}(\neg F, I) = \mathrm{FV}_{\neg}(\mathrm{sig}(F, I))$
  - $\mathrm{sig}(F \land G, I) = \mathrm{FV}_{\land}(\mathrm{sig}(F, I), \mathrm{sig}(G, I))$
  - $\mathrm{sig}(F \lor G, I) = \mathrm{FV}_{\lor}(\mathrm{sig}(F, I), \mathrm{sig}(G, I))$
  - $\mathrm{sig}(F \to G, I) = \mathrm{FV}_{\to}(\mathrm{sig}(F, I), \mathrm{sig}(G, I))$
  - $\mathrm{sig}(F \leftrightarrow G, I) = \mathrm{FV}_{\leftrightarrow}(\mathrm{sig}(F, I), \mathrm{sig}(G, I))$
- **Notación:** $I(F) = \mathrm{sig}(F, I)$

Interpretaciones de una fórmula

- **Definición:**
  Interpretaciones(F) $= \{I : I : \mathrm{SP}(F) \to \{0,1\}\}$

- **Ejemplo:** Interpretaciones($(p \lor q) \land (\neg q \lor r)$) $=$
  $\{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8\}$

	p	q	r
I_1	0	0	0
I_2	0	0	1
I_3	0	1	0
I_4	0	1	1
I_5	1	0	0
I_6	1	0	1
I_7	1	1	0
I_8	1	1	1

- **Número de interpretaciones de una fórmula:**
  $|\text{Interpretaciones}(F)| = 2^{|\mathrm{SP}(F)|}$

Modelo de una fórmula

- **Modelo:**
  - Def.: I modelo de F syss $\mathrm{sig}(F, I) = 1$
  - Representación: $I \models F$
  - Definición equivalente:

$$
\begin{array}{lll}
I \models p & \text{syss} & I(p) = 1 \\
I \models \neg F & \text{syss} & I \not\models F \\
I \models F_1 \wedge F_2 & \text{syss} & I \models F_1 \text{ y } I \models F_2 \\
I \models F_1 \vee F_2 & \text{syss} & I \models F_1 \text{ o } I \models F_2 \\
I \models F_1 \to F_2 & \text{syss} & I \not\models F_1 \text{ o } I \models F_2 \\
I \models F_1 \leftrightarrow F_2 & \text{syss} & I \models F_1 \to F_2 \text{ y } I \models F_2 \to F_1
\end{array}
$$

  - Ejemplo:

$F = (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$

$I(p) = I(r) = 1, I(q) = 0 \Longrightarrow I \models F$

$J(r) = 1, J(p) = J(q) = 0 \Longrightarrow J \not\models F$

Modelos de una fórmula

- **Modelos de una fórmula:**
  - **Def.:** Modelos(F) $= \{I \in$ Interpretaciones$(F) : I \models F\}$
  - **Ejemplo:** Modelos($(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$) $= \{I_4, I_5, I_6, I_8\}$

	p	q	r	$(p \vee q)$	$\neg q$	$(\neg q \vee r)$	$(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$
I_1	0	0	0	0	1	1	0
I_2	0	0	1	0	1	1	0
I_3	0	1	0	1	0	0	0
I_4	0	1	1	1	0	1	1
I_5	1	0	0	1	1	1	1
I_6	1	0	1	1	1	1	1
I_7	1	1	0	1	0	0	0
I_8	1	1	1	1	0	1	1

Fórmulas válidas

- **Fórmula válida (tautología):**
  - **Def.:** F **es válida syss todo interpretación de** F **es modelo de** F
  - **Representación:** $\models F$
  - **Ejemplo:** $\models (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

  - **Ejemplo:** $\not\models (p \rightarrow q)$

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Fórmulas satisfacibles e insatisfacibles

- **Fórmulas satisfacibles e insatisfacibles:**
  - **Def.:** F es satisfacible syss F tiene modelo
  - **Def.:** F es insatisfacible syss F no tiene modelo
  - **Ejemplo:**
    $(p \to q) \land (q \to r)$ es satisfacible
    $$I(p) = I(q) = I(r) = 0$$
    $p \land \neg p$ es insatisfacible

p	$\neg p$	$p \land \neg p$
1	0	0
0	1	0

- **Satisfacibilidad con MACE: Ejemplo 1**
  - **Entrada:** `ej-1.in`

```
formula_list(sos).
(p -> q) & (q -> r).
end_of_list.
```

  - **Ejecución:** `mace -p -m1 -n1 <ej-1.in`
  - **Salida:**

```
----- MACE 1.3.4, Feb 2000 -----
=== Model #1 at 0.00 seconds:
 p: F
 q: F
 r: F
end_of_model
```

Fórmulas satisfacibles e insatisfacibles

- **Satisfacibilidad con MACE: Ejemplo 2**
  - **Entrada:** `ej-2.in`

```
formula_list(sos).
(p | q) & (p -> r) & (q -> -r).
end_of_list.
```

  - **Ejecución:** `mace -p -m1 -n1 <ej-2.in`
  - **Salida:**

```
----- MACE 1.3.4, Feb 2000 -----
=== Model #1 at 0.00 seconds:
 p: T
 q: F
 r: T
end_of_model
```

- **Satisfacibilidad con MACE: Ejemplo 3**
  - **Entrada:** `ej-3.in`

```
formula_list(sos).
(p & q) & (p -> r) & (q -> -r).
end_of_list.
```

  - **Ejecución:** `mace -p -m1 -n1 <ej-3.in`
  - **Salida:**

```
----- MACE 1.3.4, Feb 2000 -----
add_clause: propositionally unsatisfiable
```

Satisfacibilidad y validez

- **Los problemas de satisfacibilidad y validez:**
  - Problema de la satisfacibilidad:
    Dada F determinar si es satisfacible.
  - Problema de la validez:
    Dada F determinar si es válida
- **Relaciones entre validez y satisfacibilidad:**
  - F es válida $\iff$ $\neg F$ es insatisfacible
  - F es válida $\implies$ F es satisfacible
  - F es satisfacible $\not\Longrightarrow$ $\neg F$ es insatisfacible
    $p \to q$ es satisfacible
    $I(p) = I(q) = 1$
    $\neg(p \to q)$ es satisfacible
    $I(p) = 1, I(q) = 0$
- **El problema de la satisfacibilidad es NP–completo**

Interpretaciones de un conjunto

- **Símbolos proposicionales de un conjunto de fórmulas:**
  - **Def.:** $\mathrm{SP}(\boldsymbol{S}) = \bigcup\{\mathrm{SP}(\boldsymbol{F}) : \boldsymbol{F} \in \boldsymbol{S}\}$
  - **Ejemplo:** $\mathrm{SP}(\{(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}), \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{a}\}) = \{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}\}$
- **Interpretaciones de un conjunto de fórmulas:**
  - **Def.:** Interpretaciones$(\boldsymbol{S}) = \{\boldsymbol{I} : \boldsymbol{I} : \mathrm{SP}(\boldsymbol{S}) \rightarrow \{0, 1\}\}$
  - **Ejemplo:** Interpretaciones$(\{\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r}\}) =$ $\{\boldsymbol{I}_1, \ldots, \boldsymbol{I}_8\}$ **definidas por**

	p	q	r
I_1	0	0	0
I_2	0	0	1
I_3	0	1	0
I_4	0	1	1
I_5	1	0	0
I_6	1	0	1
I_7	1	1	0
I_8	1	1	1

Modelos de un conjunto de fórmulas

- **Modelo de un conjunto de fórmulas:**
  - **Def.:** I es modelo de S syss para toda $F \in S, I \models F$
  - **Representación:** $I \models S$
  - **Ejemplo:**
    $S = \{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), q \rightarrow r\}$
    $I_1(p) = 1, I_1(q) = 0, I_1(r) = 1 \Longrightarrow I_1 \models S$
    $I_2(p) = 0, I_2(q) = 1, I_2(r) = 0 \Longrightarrow I_2 \not\models S$

- **Modelos de un conjunto de fórmulas**
  - **Def.:** Modelos(S) $= \{I \in$ Interpretaciones(S) $: I \models S\}$
  - **Ejemplo:**
    Modelos($\{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), p \rightarrow r\}$) $= \{I_4, I_6, I_8\}$

	p	q	r	$(p \vee q)$	$(\neg q \vee r)$	$(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$	$p \rightarrow r$
I_1	0	0	0	0	1	0	1
I_2	0	0	1	0	1	0	1
I_3	0	1	0	1	0	0	1
I_4	0	1	1	1	1	1	1
I_5	1	0	0	1	1	1	0
I_6	1	0	1	1	1	1	1
I_7	1	1	0	1	0	0	0
I_8	1	1	1	1	1	1	1

Conjuntos consistentes

- **Conjunto consistente de fórmulas:**
  - **Def.:** S **es consistente syss** S **tiene modelo**
  - **Def.:** S **es inconsistente syss** S **no tiene modelo**
  - $\{(p \vee q) \wedge (-q \vee r), p \rightarrow r\}$ **es consistente**
    $\{I_4, I_6, I_8\}$
  - $\{(p \vee q) \wedge (-q \vee r), p \rightarrow r, \neg r\}$ **es inconsistente**

	p	q	r	$(p \vee q)$	$(\neg q \vee r)$	$(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$	$p \rightarrow r$	$\neg r$
I_1	0	0	0	0	1	0	1	1
I_2	0	0	1	0	1	0	1	0
I_3	0	1	0	1	0	0	1	1
I_4	0	1	1	1	1	1	1	0
I_5	1	0	0	1	1	1	0	1
I_6	1	0	1	1	1	1	1	0
I_7	1	1	0	1	0	0	0	1
I_8	1	1	1	1	1	1	1	0

Consistencia con MACE

- $\{(p \vee q) \wedge (-q \vee r), p \rightarrow r\}$ **es consistente**
  - **Entrada:** `ej-consistencia.in`

```
formula_list(sos).
(p | q) & (-q | r).
p -> r.
end_of_list.
```

  - **Ejecución:** `mace -p -m1 -n1 <ej-consistencia.in`
  - **Salida:**

```
=== Model #1 at 0.00 seconds:
 p: T
 q: F
 r: T
end_of_model
```

- $\{(p \vee q) \wedge (-q \vee r), p \rightarrow r, \neg r\}$ **inconsistente**
  - **Entrada:** `ej-inconsistencia.in`

```
formula_list(sos).
(p | q) & (-q | r).
p -> r.
-r.
end_of_list.
```

  - **Ejecución:** `mace -p -m1 -n1 <ej-inconsistencia.in`
  - **Salida:**

```
--- statistics ----
Decide:
    Models found  0
```

Consecuencia lógica

- **Consecuencia lógica:**
  - **Def.:** F es consecuencia de S syss todos los modelos de S son modelos de F
  - **Representación:** $S \models F$
  - **Ejemplo:** $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$

	p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
I_1	0	0	0	1	1	1
I_2	0	0	1	1	1	1
I_3	0	1	0	1	0	1
I_4	0	1	1	1	1	1
I_5	1	0	0	0	1	0
I_6	1	0	1	0	1	1
I_7	1	1	0	1	0	0
I_8	1	1	1	1	1	1

  - **Ejemplo:** $\{p\} \not\models p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Consecuencia, validez y consistencia

- **Relación entre consecuencia lógica, validez, satisfacibilidad y consistencia:**
  Las siguientes condiciones son equivalentes:
  - $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$
  - $\models F_1 \land \dots \land F_n \to G$
  - $\neg(F_1 \land \dots \land F_n \to G)$ es insatisfacible
  - $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es inconsistente

Consecuencia lógica con MACE

- **Ejemplo 1: $\{p \leftrightarrow q, r \leftrightarrow (p \land q)\} \not\models p \land r$**
  - **Entrada:**

```
formula_list(sos).
p <->q.
r <-> (p & q).
-(p & r).
end_of_list.
```

  - **Salida:**

```
==== Model #1 at 0.00 seconds:
 p: F
 q: F
 r: F
end_of_model
```

- **Ejemplo 2: $\{p \leftrightarrow q, r \leftrightarrow (p \land q)\} \models p \leftrightarrow r$**
  - **Entrada:**

```
formula_list(sos).
p <->q.
r <-> (p & q).
-(p <-> r).
end_of_list.
```

  - **Salida:**

```
--- statistics ----
Decide:
    Models found  0
```

Problema de los animales con MACE

- **Base de conocimiento**
  - Base de reglas:
    - * R1: Si el animal tiene pelos es mamífero.
    - * R2: Si el animal da leche es mamífero.
    - * R3: Si el animal es un mamífero y tiene pezuñas es ungulado.
    - * R4: Si el animal es un mamífero y rumia es ungulado.
    - * R5: Si el animal es un ungulado y tiene cuello largo es una jirafa.
    - * R6: Si el animal es un ungulado y tiene rayas negras es una cebra.
  - Base de hechos:
    - * H1: El animal tiene pelos.
    - * H2: El animal tiene pezuñas.
    - * H3: El animal tiene rayas negras.
  - Consecuencia
    - * El animal es una cebra.

Problema de los animales con MACE

- **Solución con MACE**
  - **Entrada** (`ej-animales.in`)

```
formula_list(sos).
tiene_pelos | da_leche -> es_mamifero.
es_mamifero & (tiene_pezuñas | rumia) -> es_ungulado.
es_ungulado & tiene_cuello_largo -> es_jirafa.
es_ungulado & tiene_rayas_negras -> es_cebra.

tiene_pelos & tiene_pezuñas & tiene_rayas_negras.

-es_cebra.
end_of_list.
```

  - **Salida:**

```
> mace -p -m1 -n1 <ej-animales.in
Models found  0
```

Problema de los animales con MACE

- **Modelo del problema de los animales**
  - **Entrada** (`ej-animales-2.in`)

```
formula_list(sos).
tiene_pelos | da_leche -> es_mamifero.
es_mamifero & (tiene_pezuñas | rumia) -> es_ungulado.
es_ungulado & tiene_cuello_largo -> es_jirafa.
es_ungulado & tiene_rayas_negras -> es_cebra.

tiene_pelos & tiene_pezuñas & tiene_rayas_negras.

% -es_cebra.
end_of_list.
```

  - **Salida:**

```
> mace -p -m1 -n1 <ej-animales-2.in
==== Model #1 at 0.01 seconds:
 tiene_pelos: T
 es_mamifero: T
 da_leche: F
 tiene_pezugnas: T
 es_ungulado: T
 rumia: F
 tiene_cuello_largo: F
 es_jirafa: F
 tiene_rayas_negras: T
 es_cebra: T
end_of_model
```

Bibliografía

- Bundy, A. *The Computer Modelling of Mathematical Reasoning* (Academic Press, 1983)
  - Cap. 2 "Arguments about propositions"
  - Cap. 3: "The internal structure of propositions"
- Chang, C.L. y Lee, R.C.T *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving* (Academic Press, 1973)
  - Cap. 2 "The propositional logic"
- Genesereth, M.R. *Computational Logic* (27 March 2000)
  - Cap. 2 "Propositional logic"
  - Cap. 3 "Truth table method"
- Nilsson, N.J. *Inteligencia artificial (Una nueva síntesis)* (McGraw–Hill, 2000)
  - Cap. 13 "El cálculo proposicional"
- Russell, S. y Norvig, P. *Inteligencia artificial (un enfoque moderno)* (Prentice Hall Hispanoamericana, 1996)
  - Cap. 6.4 "Lógica propositiva: un tipo de lógica muy sencillo"