ALGEBRA III (Curso 1989-90)
Teoría de conjuntos
José A. Alonso Jiménez

Ejercicio 1. *Probar que para cualesquiera conjuntos a, b y c se tiene que:*
(1) $a \subseteq a$.
(2) $a \subseteq b \ \wedge \ b \subseteq a \quad \Longrightarrow \quad a = b$.
(3) $a \subseteq b \ \wedge \ b \subseteq c \quad \Longrightarrow \quad a \subseteq c$.
(4) $\emptyset \subseteq a$.

Ejercicio 2. *Probar que para cualesquiera conjuntos a, b y c*

Idenpotentes	$a \cup a = a$	$a \cap a = a$
Conmutativas	$a \cup b = b \cup a$	$a \cap b = b \cap a$
Asociativas	$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$	$a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$
Absorcin	$a \cap (a \cup b) = a$	$a \cup (a \cap b) = a$
Distributivas	$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$	$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$
De Morgan	$c - (a \cap b) = (c - a) \cup (c - b)$	$c - (a \cup b) = (c - a) \cap (c - b)$

Ejercicio 3. *Probar que para cualesquiera conjuntos a y b las condiciones siguientes son equivalentes:*
(1) $a \subseteq b$.
(2) $a \cup b = b$.
(3) $a \cap b = a$.
(4) $a - b = \emptyset$.

Ejercicio 4. *Sean a y b subconjuntos de un conjunto c. Se llama complementario de a en c al conjunto $c - a$ y se representa por a'.*
(1) *Probar que las condiciones siguientes son equivalentes:*
(1.1) $a \subseteq b$.
(1.2) $b' \subseteq a'$.
(1.3) $a \cap b' = \emptyset$.
(2) $(a \cup b)' = a' \cap b'$.
(3) $(a \cap b)' = a' \cup b'$.
(4) $(a - b)' = b \cup a'$.

Ejercicio 5. *Sea a, b y c conjuntos: Probar que:*

(1) $a \cup (b - a) = a \cup b$	(2) $a \cap (b - a) = \emptyset$
(3) $a - b = a - (a \cap b)$	(4) $a \cap (b - c) = (a \cap b) - c$
(5) $(a \cup b) - c = (a - c) \cup (b - c)$	(6) $a - (b - c) = (a - b) \cup (a \cap c)$
(7) $a - (b \cup c) = (a - b) - c$	

Ejercicio 6.
(1) *Encontrar dos conjuntos a y b tales que $a \neq b \ \wedge \cup a = \cup b$.*
(2) *Para todo $b \in a$, $b \subseteq \cup a$.*
(3) $a \subseteq b \quad \Longrightarrow \quad \cup a \subseteq \cup b$.
(4) $\forall c \in a \ (c \subseteq b) \quad \Longrightarrow \quad \cup a \subseteq b$.

Ejercicio 7. *Si a y b son conjuntos, definimos la diferencia simtrica de a y b como $a \triangle b = (a-b) \cup (b-a)$. Probar que:*

(1)	$a \triangle b$ *es un conjunto*	(2)	$a \triangle b = b \triangle a$
(3)	$a \triangle (b \triangle c) = (a \triangle b) \triangle c$	(4)	$a \cap (b \triangle c) = (a \cap b) \triangle (a \cap c)$
(5)	$a \triangle \emptyset a$	(6)	$a \triangle a = \emptyset$
(7)	$a \triangle b = c \triangle b \iff a = c$	(8)	$a \triangle b = \emptyset \iff a = b$
(9)	$a \triangle b = (a \cup b) - (a \cap b)$	(10)	$(a \cup c) \triangle (b \cup c) = (a \triangle b) - c$
(11)	$a \cup c = b \cup c \iff a \triangle b \subseteq c$	(12)	$\forall\ a\ \forall\ b\ \exists!\ c\ (x \triangle c = b)$
(13)	$a,\ b$ *disjuntos* $\iff a \cup b = a \triangle b$	(14)	$a \cup b = a \triangle b \triangle (a \cap b)$

Ejercicio 8. *Hallar los siguientes conjuntos:*

(1) $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$.

(2) $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\}))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\})))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\}))))$.

(3) $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}))$.

(4) $\bigcap\{\mathcal{P}(\emptyset), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))\}$, $\bigcap\{\mathcal{P}(\{\emptyset\}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\})), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\})))\}$.

Ejercicio 9.

(1) Si $a = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$, *hallar* $\cup a$, $\mathcal{P}(a)$, $\mathcal{P}(\cup a)$, $\bigcup \mathcal{P}(a)$.

(2) Si $c = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, *hallar* $\cup \cup c$, $\cap \cap c$, $(\cap \cup c) \cup (\cup \cup c - \cup \cap c)$ *y* $\cup(\cup c - \cap c)$ *(ste ltimo en los casos* $a = b$ *y* $a \neq b$*).*

Ejercicio 10. *Probar que:*

(1) Para todo a, $\bigcup \mathcal{P}(a) \subseteq a$.

(2) Para todo a, $a \subseteq \mathcal{P}(\cup a)$. *Cundo se da la igualdad?*

(3) Para todo $a,\ b$,

(3.1) $\mathcal{P}(a) \cap \mathcal{P}(b) = \mathcal{P}(a \cap b)$.

(3.2) $\mathcal{P}(a) \cup \mathcal{P}(b) \subseteq \mathcal{P}(a \cup b)$. *Cundo se da la igualdad?*

(4)

(4.1) Hallar dos conjuntos a *y* b *tales que:* $a \in b$ *y* $\mathcal{P}(a) \notin \mathcal{P}(b)$.

(4.2) $\forall\ a\ \forall b\ (a \in b \implies \mathcal{P}(a) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\cup b)))$.

(5) $\forall\ a\ (\{\emptyset, \{emptyest\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(a))))$.

(6) $\forall\ a\ \forall\ b\ (\mathcal{P}(a) = \mathcal{P}(b) \implies a = b)$.

(7) Para todo $a \neq \emptyset$, $\mathcal{P}(\cap a) = \bigcap\{\mathcal{P}(b) :\ b \in a\}$.

(8) Para todo a, $\bigcup\{\mathcal{P}(b) :\ b \in a\} \subseteq \mathcal{P}(\cup a)$. *Cundo se da la igualdad?*

Ejercicio 42.

(1) Encontrar conjuntos a *y* b *tales que* $\{\{\{\emptyset\}\}, a, b\}$ *sea un conjunto transitivo.*

(2) Encontrar conjuntos a, b *y* c *tales que* $\{\{\{\{\emptyset\}\}\}, a, b, c\}$ *sea un conjunto transitivo.*

(3) Hallar un conjunto transitivo a *tal que* $01 \subseteq a$ *y un conjunto transitivo* b *tal que* $01 \in b$.

Ejercicio 43. *Dar ejemplos de*

(1) un conjunto transitivo que no sea ordinal,

(2) un conjunto bien ordenado por la relacin de pertenencia que no sea ordinal.

Ejercicio 44. *Sea a un conjunto. Demostrar que:*
(1) a transitivo $\implies$ $a \cup \{a\}, \cup a$ y $\mathcal{P}(a)$ transitivos.
(2) $\mathcal{P}(a)$ transitivo $\implies$ a transitivo.
(3) $\bigcup(a \cup \{a\})$ transitivo $\implies$ a transitivo.

Ejercicio 45. *Dar un conjunto a de ordinales tal que a no es un ordinal y para todo $\alpha \in a$, $\alpha + 1 \in a$.*

Ejercicio 46. *Sean a y b conjuntos de ordinales tales que para todo $\alpha \in a$ existe $\beta \in b$ tal que $\alpha < \beta$. Probar que $\cup a \in \cup b$ o $\cup a = \cup b$.*

Ejercicio 47. *Demostrar que el ordinal de un conjunto bien ordenado que no tiene elemento maximal es un ordinal límite. Es cierto el recíproco?*

Ejercicio 48.
(1) *Sea $\alpha \in$ **Ord**. Qu ordinal es $sup(\alpha)$?*
(2) *Probar que la unin de un conjunto no vacío de ordinales límites es un ordinal límite. Es cierto el recíproco?*

Ejercicio 49. *Sea r la relacin sobre $2 \times \omega$ dada por:*

$$an \; r \; bm \iff \begin{cases} a < b \\ a = b \wedge n < m \end{cases}$$

Probar que el tipo de orden de $2 \times \omega r$ es el primer ordinal límite mayor que ω.

Ejercicio 50. *Sea a un conjunto inductivo. Probar que:*
(1) $\mathcal{P}(a)$ y $\{b \in a : \; b \text{ transitivo}\}$ son inductivos.
(2) $\{b \in a : \; b \text{ transitivo} \wedge b \notin b\}$ es inductivo.
(3) $\{b \in a : \; b \text{ transitivo} \wedge \text{todo } c \subseteq b \text{ no vacío tiene elemento } \in\text{-minimal}\}$ es transitivo.
(4) $\{b \in a : \; b = \emptyset \vee \text{existe } c \text{ tal que } b = c \cup \{c\}\}$ es inductivo.

Ejercicio 51. *Demostrar que un ordinal es límite si y slo si es un conjunto inductivo. Dar un ejemplo de un conjunto inductivo que no sea ordinal.*

Ejercicio 52.
(1) *Sean $\alpha, \beta \in$ **Ord** con $\beta \neq 0$. Probar que*

$$\alpha + \beta \text{ límite} \iff \beta \text{ límite}$$

(2) *Probar que todo ordinal se puede expresar de la forma $\alpha + n$ donde $n \in \omega$ y $\alpha = 0$ o es un ordenal límite. Ms an probar que esta representacin es nica.*

Ejercicio 53. *Calcular los siguientes ordinales (desarrollndolos en potencias de ω).*
(1) $2 + \omega$. (2) $(\omega + 1) + \omega$. (3) $2 \cdot \omega$.
(4) $(\omega \cdot 3 + 2) + (\omega + 1)$. (5) $\omega + (\omega^2 + 1)$. (6) $(\omega^2 + \omega \cdot 2 + 2) + (\omega + 1)$.
(7) $(\omega^7 + \omega^5 + \omega^3 \cdot 2 + \omega \cdot 10 + 3) + (\omega^4 + \omega^2 \cdot 2 + 2)$.

Ejercicio 54. *Determinar una permutacin de los ordenales*

(1) $1,\ 2,\ \omega$ *tal que su suma sea*

(1.1) ω. *(1.2)* $\omega+1$. *(1.3)* $\omega+2$. *(1.4)* $\omega+3$.

(2) $\omega,\ \omega+1,\ \omega\cdot 2+1$ *tal que su suma sea*

(2.1) $\omega\cdot 4$. *(2.2)* $\omega\cdot +1$.

(3) $\omega,\ \omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 3,\ \omega\cdot 5,\ \omega^2$ *tal que su suma sea*

(3.1) $\omega^2+\omega\cdot 5$. *(3.2)* $\omega^2+\omega\cdot 10+1$. *(3.3)* $\omega^2+\omega\cdot 5+1$.

(3.4) $\omega^2+\omega\cdot 11+1$. *(3.5)* $\omega^2+\omega\cdot 9$. *(3.6)* $\omega^2+\omega\cdot 11$.

Ejercicio 55. *Calcular todas las sumas posibles de los siguientes ordinales (incluyendo en cada caso todos los sumandos)*

(1) $1,\ 2,\ 4,\ 5,\ \omega$ *(Hay 13 sumas distintas).*

(2) $\omega+2,\ \omega\cdot 2+1$ *(Hay 2 sumas distintas).*

(3) $\omega+2,\ \omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 4$ *(Hay 3 sumas distintas).*

(4) $\omega+2,\ \omega\cdot 2+1,\ \omega\cdot 4,\ \omega^2$ *(Hay 13 sumas distintas).*

Ejercicio 56. *Dar ejemplo de ordinales* $\alpha<\beta$ *tales que:*

(1) $\alpha+\beta<\beta+\alpha$.

(2) $\beta+\alpha<\alpha+\beta$.

Ejercicio 57. *Probar que:*

(1) $\forall n\in\omega-\{0\}((\omega^3+\omega)\cdot n=\omega^3\cdot n+\omega)$.

(2) $(\omega^3+\omega)\cdot\omega=\omega^4$.

(3) Sean $\alpha<\beta$. *Entonces*

(3.1) $\omega^\alpha+\omega^\beta=\omega^\beta$.

(3.2) $\forall\ n,m\in\omega-\{0\}\ (\omega^\alpha\cdot n+\omega^\beta\cdot m=\omega^\beta\cdot m)$.

Ejercicio 58. *Sean* $k\in\omega$, $0<n_i\in\omega$ $i=0,\dots,k$ *y* $\gamma_0>\gamma_1>\cdots>\gamma_k$. *Probar que:*

(1) Si $0<n\in\omega$, *entonces*

$$(\omega^{\gamma_0}\cdot n_0+\cdots+\omega^{\gamma_k}\cdot n_k)\cdot n=\omega^{\gamma_0}\cdot n_0\cdot n+\omega^{\gamma_1}\cdot n_1+\cdots+\omega^{\gamma_k}\cdot n_k$$

(2) $(\omega^{\gamma_0}\cdot n_0+\cdots+\omega^{\gamma_k}\cdot n_k)\cdot\omega=\omega^{\gamma_0+1}$.

(3) $(\omega^{\gamma_0}\cdot n_0+\cdots+\omega^{\gamma_k}\cdot n_k)\cdot\omega^\gamma=\omega^{\gamma_0+\gamma}$.

Ejercicio 59. *Calcular (desarrollndolos en potencias de* ω*) los siguientes ordinales:*

(1) $(\omega+1)^2$. *(2)* $(\omega+1)\cdot(\omega^2+1)$. *(3)* $(\omega^2+1)\cdot(\omega+1)$.

(4) $(\omega^3+\omega)^5$. *(5)* $(\omega^5+\omega^3)^3$. *(6)* $4^{\omega+1}$.

(7) $4^{\omega\cdot 3+4}$. *(8)* $(\omega+3)^\omega$. *(9)* $(\omega^2+\omega)^\omega$.

Ejercicio 60. *Determinar todos los ordinales* α *tales que* $\omega\le\alpha<\omega^3$ *y* $\exists\ \beta\ (\beta^2=\alpha)$.

Ejercicio 61. *Encontrar el menor*

(1) α *tal que* $\omega + \alpha = \alpha$.
(2) $\alpha > \omega$ *tal que* $\forall\ \beta < \alpha\ (\beta + \alpha = \alpha)$.
(3) $\alpha > 0$ *tal que* $\omega \cdot \alpha = \alpha$.
(4) $\alpha > \omega$ *tal que* $\forall\ \beta < \alpha\ (\beta \cdot \alpha = \alpha)$.
(5) α *tal que* $\omega^\alpha = \alpha$.
(6) $\alpha < \omega$ *tal que* $\forall\ \beta\ (1 < \beta < \alpha\ \rightarrow\ \beta^\alpha = \alpha)$.

Ejercicio 62. *Demostrar que:*

(1) *No existe ningn ordinal* α *tal que* $\alpha + \omega = \alpha + 1$.
(2) *Para cada* α, $\alpha + 1 + \alpha = 1 + \alpha \cdot 2$.

Ejercicio 63.

(1) *En cada caso determinar el ordinal* $\alpha + \beta + \gamma$
  (1.1) $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, \omega\}$.
  (1.2) $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{\omega, \omega + 5, \omega^2\}$.
  (1.3) $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, \omega, \omega \cdot 2\}$.
(2) *Encontrar tres ordinales* α, β, γ *tales que el nmero de sumas distintas de todas sus permutaciones sea:*
  (2.1) 1. (2.2) 3. (2.3) 5.
(3) *Determinar todos los ordinales* $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ *donde* $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{3, \omega, \omega \cdot 2\}$.
(4) *Hallar tres ordinales tales que al formar los productos de todas sus permutaciones se obtengan* $3! = 6$ *valores distintos.*

Ejercicio 64. *Demostrar que dados tres ordinales cualesquiera* α, β, γ *el nmero de sumas distintas de todas sus permutaciones es menor que* $3! = 6$.

Ejercicio 65. *En cada caso, dados* α *y* β, *hallar el cociente* (γ) *y el resto* (ρ).

(1) $\omega + 4,\ \omega$. (2) $\omega \cdot 3 + 2,\ \omega + 1$. (3) $\omega^\omega,\ \omega$. (4) $\omega^2 + \omega \cdot 5 + 3,\ \omega^2 + 1$.
(5) $\omega^\omega + \omega^3 + \omega \cdot 3 + 2,\ \omega^5$. (6) $\omega^5,\ \omega^\omega + \omega^3 + \omega \cdot 3 + 2$.

Ejercicio 66. *Encontrar* $A \subseteq \mathbf{Q}$ *tal que* $A{<_\mathbf{Q}}$ *sea isomorfo a* α *donde:*

(1) $\alpha = \omega + 1$. (2) $\alpha = \omega \cdot 2$. (3) $\alpha = \omega \cdot 3$.
(4) $\alpha = \omega^2$. (5) $\alpha = \omega^3$. (6) $\alpha = \varepsilon_0$.

Ejercicio 67. *Determinar cales de las funciones* $F_i : \mathbf{Ord} \longrightarrow \mathbf{Ord}$ *siguientes son crecientes y continuas.*

(1) $F_1(\alpha) = \alpha + 1$. (2) $F_2(\alpha) = \alpha^2$. (3) $F_3(\alpha) = \alpha \cdot 2$. (4) $F_4(\alpha) = \omega^\alpha + \omega$.
(5) $F_5(\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha < \omega \\ \omega & \text{si } \alpha \geq \omega \end{cases}$ (6) $F_6(\alpha) = \begin{cases} \alpha + 1 & \text{si } \alpha \text{ no es límite} \\ \alpha & \text{si } \alpha \text{ es límite} \end{cases}$

Ejercicio 68. *Sea* $F : \mathbf{Ord} \longrightarrow \mathbf{Ord}$ *una funcin normal. Probar que* F' *la funcin derivada de* F *es normal. Donde* $F' : \mathbf{Ord} \longrightarrow \mathbf{Ord}$ *est definida por*

$$F'(\alpha) = inf(\{\gamma :\ \gamma \text{ es un punto límite de } F \text{ y } \forall\ \beta < \alpha\ (F'(\beta) \neq \gamma)\})$$

Ejercicio 69. *Se dice que un ordinal α es aditivamente indescomponible (a.i.) si α no se puede poner como suma de dos ordinales estrictamente menores que α. Demostrar que son equivalentes:*

(1) *α es a.i.*
(2) *Para todo $\beta < \alpha$, $\beta + \alpha = \alpha$.*
(3) *α es una potencia de ω. Esto es, existe γ tal que $\alpha = \omega^\gamma$.*

Ejercicio 70.

(1) *Para cada α, hallar el menor rodinal a.i. estrictamente mayor que α.*
(2) *Demostrar que si $\alpha > 0$ es a.i. entonces $\forall\ \beta\ \forall\ \gamma < \alpha\ (\gamma + \beta + \alpha = \beta + \alpha)$*
(3) *Demostrar que el supremo de un conjunto no vacío de ordinales a.i. es un ordinal a.i.*
(4) *Demostrar que todo ordinal $\alpha > 0$ existen unos nicos $n \in \omega - \{0\}$, α_i $(i = 1, \ldots, n)$ tales que:*
(1) *$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.*
(2) *Para cada i $1 \leq i \leq n$ α_i es a.i.*
(3) *$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n$.*

Ejercicio 71. *Sea $A <$ una clase bien ordenada. Una funcin inyectiva $F : A \times A \longrightarrow A$ diremos que es momtona sobra A si:*

$$\begin{aligned} a < a' &\ \rightarrow\ \forall\ b \in A\ (F(a,b) < F(a',b)) \\ b < b' &\ \rightarrow\ \forall\ a \in A\ (F(a,b) < F(a,b')) \end{aligned}$$

(1) *Sea $f : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ la aplicacin definida por:*
$$f(n,m) = \binom{n+m+1}{2} + n$$
Probar que:
  (1.1) *f es biyectiva.*
  (1.2) *f es montona sobre ω.*
(2) *Probar que no existe ninguna aplicacin montona sobre $\omega \cdot 2$.*
(3) *Definir una aplicacin montona sobre ω^2. (Usar la aplicacin del apartado (1)).*
(4) *Sea F una funcin montona sobre* **Ord**. *Diremos que γ es un punto crítico para F si $\forall\ \alpha, \beta < \gamma\ (F(\alpha,\beta) < \gamma)$. Probar que si γ es un punto crítico para F, entonces existe ρ tal que $\gamma = \omega^\rho$.*
(5) *Probar que existe una funcin montona sobre* **Ord** *tal que todo ordinal de la forma ω^ρ es un punto crítico.*

Ejercicio 72. *Sea a un conjunto finito.*

(1) *Sea $f : a \longrightarrow a$. Probar que: f inyectiva $\iff$ f suprayectiva.*
(2) *Para todo conjunto b, $b \preceq a\ \vee\ a \preceq b$.*
(3) *Para toda funcin F, $F[a] \preceq a$.*
(4) *Si b es infinito y $f : b \longrightarrow a$, existe $c \in a$ tal que $f^{-1}(c)$ es infinito.*
(5) *Si ar es un orden lineal, entonces r bien ordena a a.*

Ejercicio 73. *Sean ar y bs conjuntos linealmente ordenados. Probar que: si a y b son finitos, entonces $ar \cong bs \iff a \sim b$*

Ejercicio 74. *Sea ar un orden lineal.*

(1) Probar que todo conjunto de subconjuntos finitos de a tiene una funcin de eleccin.
(2) Sea $\langle a_n : n \in \omega \rangle$ una sucesin de subconjuntos finitos de a. Probar que $\bigcup_{n\in\omega} a_n$ es numerable.

Ejercicio 75. *Sean a y b conjuntos. Probar que:*

(1) a numerable y b finito $\implies$ $a \cup b$ numerable.
(2) a D-infinito y b numerable $\implies$ $a \cup b \sim a$.
(3) $a \subseteq b$, a infinito y b numerable $\implies$ a numerable.
(4) $a \cup b$ numerable $\implies$ a numerable $\vee$ b numerable.

Ejercicio 76. *Demostrar que las condiciones siguientes son equivalentes:*

(1) a es D-infinito.
(2) $\forall\, b\ (a \sim a \cup \{b\})$.
(3) $\forall\, b\ (a \sim a - \{b\})$.

Ejercicio 77. *Demostrar que para cada conjunto a las condiciones siguientes son equivalentes:*

(1) a es D-finito.
(2) $\forall\, b\ (a \sim b \ \rightarrow\ a - b \sim b - a)$.

Ejercicio 78. *Sea a un conjunto infinito y D-finito. Para cada $n \in \omega$ sea $I(n,a)$ el conjunto de las aplicaciones inyectivas de n en a. Probar que:*

(1) $\bigcup_{n\in\omega} I(n,a)$ es un conjunto infinito y D-finito.
(2) Para cada $b \subseteq \omega$ tal que $b \neq \{0\}$, $\bigcup_{n\in b} I(n,a)$ es infinito y D-finito.
(3) Si $b \subset c \subseteq \omega$, entonces $\bigcup_{n\in b} I(n,a) \prec \bigcup_{n\in c} I(n,a)$.

Ejercicio 79 (AC). *Probar que si $\langle a_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesin creciente de conjuntos y b es un conjunto tal que:*

(1) $b \subseteq \bigcup_{n\in\omega} a_n$.
(2) Para todo $c \subseteq b$ infinito existe $n \in \omega$ tal que $c \cap a_n$ es infinito,

entonces existe $m \in \omega$ tal que $b \subseteq a_m$.

Ejercicio 80. *Sea a un conjunto numerable. Probar que:*

(1) p una particin de a $\implies$ $\exists\, b\ \forall\, c \in p\ (c \cap b$ es unitario).
(2) $\exists\, p\ (p$ particin de $a\ \wedge\ \forall\, x \in p\ (x$ numerable)).
Es cierto el recíproco? Y en **ZFC**?

Ejercicio 81. *Demostrar que las aplicaciones $F, G : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ definidas por:*

$$F(n,m) = 2^m \cdot (2 \cdot n + 1) - 1$$
$$G(n,m) = \tfrac{1}{2} \cdot ((n+m)^2 + 3 \cdot n + m)$$

son biyectivas.

Ejercicio 82.

(1) *Sea* $f : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ *la aplicacin definida por:*

$$f(n,m) = \binom{n+m+1}{2} + n$$

Probar que f *es biyectiva.*

(2) *Probar que existen aplicaciones suprayectivas* $g, h : \omega \longrightarrow \omega$ *tales que:*

(2.1) $f(g(n), h(n)) = n$.

(2.2) $g(n),\ h(n) \leq n$.

(3) *Sea* $\omega^{<\omega} = \bigcup\{\omega^n :\ n \in \omega\}$. *Definimos por recursin* $F : \omega \longrightarrow \omega^{<\omega}$

$$F(0) = id_\omega$$

$F(n+1) : \omega^{n+2} \longrightarrow \omega$ *es la aplicacin definida por*

$$F(n+1)(g) \ = \ \begin{cases} f(F(n)(g_{|n+1}), g(n+1)) & \text{si } F(n) : \omega^{n+1} \longrightarrow \omega \\ 0 \quad \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Probar que para todo $n > 0$ $F(n)$ *es una aplicacin biyectiva de* ω^{n+1} *en* ω.

(4) *Definimos* $F' : \omega^{n+1} \times \omega^{n+1} \longrightarrow \omega^{n+1}$ *como sigue. Si* $g,\ h \in \omega^{n+1}$, *entonces* $F'(g,h)$ *es la aplicacin de* $n+1$ *en* ω *definida por* $F'(g,h)(m) = f(g(m), h(m))$. *Probar que* F' *es biyectiva.*

(5) *Definimos* $F^* : \omega^\omega \times \omega^\omega \longrightarrow \omega^\omega$ *como sigue. Sean* $g, h \in \omega^\omega$, $F^*(g,h)$ *es la aplicacin de* ω *en* ω *definida por:*

$$F^*(g,h)(m) = f(g(m), h(m))$$

Probar que F^* *es biyectiva.*

(6) *Definimos* $G : \omega^{<\omega} - \{0\} \longrightarrow \omega$ *como sigue. Sea* $g \in \omega^{<\omega} - \{0\}$. *Entonces para algn* $n \in \omega$ $(g \in \omega^{n+1})$

$$G(g) = f(n, F(n)(g))$$

Probar que G *es biyectiva.*

(7) *Sea* $G' : \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega$ *la aplicacin definida por:*

$$G'(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g = \emptyset \\ G(g) + 1 & \text{si } g \neq \emptyset \end{cases}$$

Probar que G' *es biyectiva.*

(8) *Definimos* $F'' : \omega^\omega \longrightarrow (\omega^\omega)^\omega$ *como sigue. Sea* $g \in \omega^\omega$, $F''(g) : \omega \longrightarrow \omega^\omega$ *tal que para cada* $n \in \omega$, $F''(g)(n)$ *es la aplicacin de* ω *en* ω *definida por:*

$$F''(g)(n)(m) = g(f(n,m))$$

Probar que F'' *es biyectiva.*

Ejercicio 83.

(1) *Sean* $b \subseteq a$ *y* c *un conjunto con* $a \cap c = \emptyset$. *Sean* $g : \omega \longrightarrow c$ *y* $h : \omega \longrightarrow b$ *aplicaciones biyectivas. Definir una aplicacin biyectiva* $f : a \cup c \longrightarrow a$.

(2) *Sean* $n \in \omega$ *y* $g : n \longrightarrow b$, $h : \omega \longrightarrow a$ *aplicaciones biyectivas. Definir una aplicacin biyectiva* $f : a \longrightarrow a \cup b$.

(3) $a \sim \omega\ \wedge\ (c \text{ finito} \vee c \sim \omega) \quad \Longrightarrow \quad a \sim a \cup c$.

Ejercicio 84. *Probar que:*

(1) *Existe una aplicacin* $H : (\omega^\omega)^\omega \longrightarrow \omega^\omega$ *tal que para todo* $h \in (\omega^\omega)^\omega$ *y todo* $m \in \omega$, $\{n : \ H(h)(n) = h(m)(n)\}$ *es finito.*

(2) $\{f : \ f : \omega \longrightarrow \omega \text{ creciente}\} \sim 2^\omega$.

(3) **(AC)** $\forall\, n \in \omega\ (a_n \sim \omega) \quad \Longrightarrow \quad \bigcup\{a_n : \ n \in \omega\} \sim \omega$. *Donde se usa el axioma de eleccin?*

Ejercicio 85. *Sean* $f, g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *tales que la aplicacin* $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ *definida por* $h(x) = f(x)g(x)$ *es biyectiva. Probar que la aplicacin* $h' : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ *definida por:*

$$h'(x) = f(x)h(f(x)g(x)$$

es biyectiva.

Ejercicio 86.

(1) *Probar que existe* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{R})$ *tal que:*

  (1.1) $r \neq s \quad \Longrightarrow \quad f(r) \cap f(s) = \emptyset$.

  (1.2) $f(r) \sim \mathbf{R}$.

  (1.3) $\bigcup\{f(r) : \ r \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}^2$.

(2) *Probar que* $\{x : \ x \text{ es una recta de } \mathbf{R}^2\} \sim \mathbf{R}^2$.

(3) $a \sim \mathbf{R} \quad \Longrightarrow \quad a \cup \{b\} \sim \mathbf{R}$.

(4) *Sea* r *una recta de* $\mathbf{R}^2$. *Probar que se tiene uno y slo uno de los siguientes casos*

$$r \cap \mathbf{Q}^2 = \emptyset;\ r \cap \mathbf{Q}^2 \sim \omega;\ r \cap \mathbf{Q}^2 \text{ es unitario}$$

Ejercicio 87. *Probar que para todo* $r \in \mathbf{R}$ *con* $r \geq 0$ *la aplicacin* $f : [0,1] \longrightarrow [0,2]$ *definida por*

$$f(x) = 2\frac{(x+r)^2 - r^2}{1-2r}$$

es biyectiva.

Ejercicio 88.

(1) *Probar que si* x *es un conjunto infinito de intervalos abiertos de* $\mathbf{R}$ *disjuntos dos a dos, entonces* $x \sim \omega$.

(2) *Probar que no existe una aplicacin* $f : \omega_1 \longrightarrow \mathbf{R}$ *creciente.*

Ejercicio 89. *Sean* $A \subseteq \mathbf{R}$ *y* $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ *creciente.*

(1) *Sea* $a \in A$. *Probar que si* f *no es continua por la derecha en* a, *entonces*

$$\exists\, q \in \mathbf{Q}\ (f(a) < q \wedge \forall\, x \in A\ (a < x \rightarrow q < f(x)))$$

(2) *Sea* $h : \omega \longrightarrow \mathbf{Q}$ *biyectiva, notaremos* $h(n) = q_n$, *así* $\mathbf{Q} = \{q_n : \ n \in \omega\}$. *Sea*

$$A_d = \{a \in A : \ f \text{ no es continua por la derecha en } a\}$$

Probar que la aplicacin

$$a \in A_d \ \longrightarrow \ inf(\{n \in \omega : \ f(a) < q_n \wedge \forall\, x \in A\ (a < x \rightarrow q_n < f(x))\})$$

es inyectiva.

(3) *Probar que* $\{a \in A : \ f \text{ no es continua en } a\} \preceq \omega$

Ejercicio 90. *Sea $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Diremos que $a \in \mathbf{R}$ es un mximo para f si existe un intervalo abierto I de $\mathbf{R}$ tal que:*

$$a \in I \wedge \forall\, x \in I\ (a \neq x \to f(x) < f(a))$$

Probar que $\{a \in \mathbf{R} :\ a \text{ es un mximo para } f\} \preceq \omega$.

Ejercicio 91.

(1) Probar que no existen aplicaciones $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ biyectivas y continuas.

(2) Sea $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ la aplicacin peridica de periodo 2 dada por

Si $0 \leq x \leq 1$

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 3x - 1 & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 1 & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Si $-1 \leq x \leq 0 \quad f(x) = f(-x)$.

Sean $h_1,\ h_2 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ las aplicaciones definidas por:

$$h_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(3^{2(n-1)} t)$$

$$h_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(3^{2n-1} t)$$

probar que:

(2.1) $f,\ h_1$ y h_2 son continuas.

(2.2) La aplicacin $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]^2$ definida por

$$g(x) = h_1(x) h_2(x)$$

es continua y suprayectiva.

(Sugerencia) Si $x, y \in [0,1]$ poner

$$x = \frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \ldots \qquad y = \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_5}{2^3} + \ldots$$

con $a_i \in \{0,1\}$. Tomar $t = \dfrac{2a_0}{3} + \dfrac{2a_1}{3^2} + \cdots + \dfrac{2a_{k-1}}{3^k} + \dfrac{2a_k}{3^{k+1}} + \ldots$. Probar que $a_k = f(3^k t)$ y obtener de aquí que $g(t) = xy$.

Ejercicio 92 (AC). *Sea $\{A_n :\ n \in \omega\}$ una particin de $\mathbf{R}$. Probar que existe $n \in \omega$ tal que $|A_n| = |\mathbf{R}|$.*

Ejercicio 93. *Consideremos sobre $\mathbf{R}$ la relacin de equivalencia $\sim_{\mathbf{Q}}$ definida por*

$$r \sim_{\mathbf{Q}} s \quad\Longleftrightarrow\quad r - s \in \mathbf{Q}$$

Calcular:

(1) $|\mathbf{R}/\sim_{\mathbf{Q}}|$.

(2) Para cada $r \in \mathbf{R}$, $|\{s \in \mathbf{R} :\ s \sim_{\mathbf{Q}} r\}|$.

Ejercicio 94. *Sea $A \subseteq [0,1]$. Demostrar que:*

(1) *Si para cada $a \in A$, $a < 1$, el conjunto $\{b \in A : \ b < a\}$ es numerable, entonces A es numerable.*
(2) *Si A con su orden natural est bien ordenado, entonces A es numerable.*

Ejercicio 95. *Sea $D \subseteq \mathbf{R}^2$ numerable. Demostrar que existe una particin, $D = A \cup B$ $A \cap B = \emptyset$, de D tal que cada recta paralela al eje de abcisas tiene a lo ms una cantidad finita de puntos en comn con A y cada recta paralela al eje de ordenadas tiene a lo ms una cantidad finita de puntos en comn con B.*

Ejercicio 96. *Demostrar que los conjuntos siguientes son equivalentes a $\mathbf{R}$ (o a 2^ω o a ω^ω).*

(1) $\{f \in \omega^\omega : \ f$ *inyectiva*$\}$.
(2) $\{f \in \omega^\omega : \ f$ *biyectiva*$\}$.
(3) $\{f \in 3^\omega : \ \forall\, n \in \omega\ (f(n) \neq f(n+1))\}$
(4) $\{P : \ P$ *es una particin de* $\omega\}$.
(5) $\{f \in \omega^\omega : \ \forall\, n \in \omega\ (f^{-1}(n) \sim \omega\}$.
(6) $\{f : \ f : \omega \longrightarrow \mathbf{Q} \wedge \lim_{n\to\infty} f(n) = 0\}$.

Ejercicio 97. *Sea $A \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ tal que para todo $a \subseteq \omega$ ($\omega - a \in A$ o $a \in A$, pero no ambos). Probar que $A \sim \mathcal{P}(\omega)$.*

Ejercicio 98. *Demostrar que existe una familia $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$ de subconjuntos de $\mathbf{R}$ tal que*

(1) $\alpha \neq \alpha' \quad \Longrightarrow \quad A_\alpha \cap A_{\alpha'} = \emptyset$.
(2) $\mathbf{R} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$.

i.e. $\{A_\alpha : \ \alpha < \omega_1\}$ es una particin de $\mathbf{R}$. Prueba esto que $1 \leq 20$?

Ejercicio 99. *Sean $f : a \longrightarrow a'$ y $g : b \longrightarrow b'$ aplicaciones biyectivas.*

(1) *Supongamos que $a \cap b = a' \cap b' = \emptyset$. Definir $h : a \cup b \longrightarrow a' \cup b'$ biyectiva.*
(2) *Definir aplicaciones biyectivas $h_1 : a \times b \longrightarrow a' \times b'$ y $h_2 : a^b \longrightarrow (a')^{b'}$.*

Ejercicio 100.

(1) *Supongamos que $b \cap c = \emptyset$. Definir una aplicacin biyectiva $h : a^{(b\cup c)} \longrightarrow a^b \times a^c$.*
(2) *Definir una aplicacin biyectiva $h : (a \times b)^c \longrightarrow a^c \times b^c$.*
(3) *Definir una aplicacin biyectiva $h : (a^b)^c \longrightarrow a^{(b\times c)}$.*

Ejercicio 101. *Sean F, G, H funciones y a un conjunto tal que:*

(1) $x, y \in a \wedge x \neq y \quad \Longrightarrow \quad F(x) \cap F(y) = G(x) \cap G(y) = \emptyset$.
(2) $x \in a \quad \Longrightarrow \quad H(x) : F(x) \longrightarrow G(x)$ *biyectiva.*

Definir una aplicacin $g : \bigcup F[a] \longrightarrow \bigcup G[a]$ biyectiva.

Ejercicio 102. *Probar que: $a - b \sim b - a \quad \Longrightarrow \quad a \sim b$. Es cierto el recíproco?*

Ejercicio 103.

(1) *Sean* $a' \subseteq a$, $b' \subseteq b$ *y* $f : a \longrightarrow b'$, $g : b \longrightarrow a'$ *aplicaciones biyectivas. Definir* $h : a \longrightarrow b$ *biyectiva.*

(2) *Sean* $b \subseteq a$ *y* $f : b \longrightarrow b \cup c$ *biyectiva. Definir* $g : a \longrightarrow a \cup c$ *biyectiva.*

(3) *Sean* $f_1 : a \longrightarrow b' \subseteq b$, $f_2 : b \longrightarrow c' \subseteq c$ *y* $f_3 : c \longrightarrow a' \subseteq a$ *aplicaciones biyectivas. Definir aplicaciones biyectivas* $g : a \longrightarrow c$ *y* $h : a \longrightarrow b$.

(4) *Sean* $c \subseteq a$, $b \subseteq d$ *y* $g : c \cup d \longrightarrow c$ *biyectiva. Definir* $f : a \cup b \longrightarrow a$ *biyectiva.*

Ejercicio 104. *Sean* $b \subseteq c \subseteq a$, $b' \subseteq a'$ *y* $f : a \longrightarrow a'$, $g : b \longrightarrow b'$ *aplicaciones biyectivas.*

(1) *Sea* $F : \mathcal{P}(b) \longrightarrow \mathcal{P}(b)$ *definida por* $F(z) = g^{-1}[b' - f[c - z]]$. *Probar que*

$$r \subseteq s \implies F(r) \subseteq F(s)$$

(2) *Sea* $G : \mathcal{P}(x) \longrightarrow \mathcal{P}(x)$ *tal que* $s \subseteq r \ \rightarrow\ G(s) \subseteq G(r)$. *Probar que*

$$\exists\, r \in \mathcal{P}(x)\ (G(r) = r)$$

(3) *Sea* $z \subseteq b$ *tal que* $F(z) = z$. *Probar que:*

(3.1) $g[z] \cap f[c - z] = \emptyset$.

(3.2) $b' \subseteq g[z] \cup f[c - z]$.

Definimos $h : a \longrightarrow a'$ *por:* $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in a - z \\ g(x) & \text{si } x \in z \end{cases}$ *Probar que:*

(3.3) $h_{|c}$ *es inyectiva.*

(3.4) $b' \subseteq h[c]$.

(4) *Probar que existe* c' *tal que* $b' \subseteq c' \subseteq a'$ *y* $c \sim c'$.

Ejercicio 105. *Sea* $\langle a_i : i \in I \rangle$ *una familia de conjuntos. Probar que:*

(1) $\times_{i\in I} a_i^b \sim (\times_{i\in I} a_i)^b$.

(2) $\times_{i\in I} b^{a_i} \sim b^{(\bigcup\{\{i\}\times a_i :\ i\in I\})}$.

(3) *Sea* $\{b_j : j \in J\}$ *una particin de* I. *Entonces*

$$\times_{i\in I} a_i \sim \times_{j\in J}(\times_{i\in b_j} a_i)$$

Ejercicio 106. $a \sim c,\ b \sim d,\ a \cap c = \emptyset,\ b \cap d = \emptyset,\ a \cup c \sim b \cup d \implies a \sim b.$

Ejercicio 107. *Sean* $f : a \longrightarrow b$ *y* $g : b \longrightarrow a$ *inyectivas. Probar que existen* $a_1, a_2 \subseteq a$ *y* $b_1, b_2 \subseteq b$ *tales que:*

(1) $a_1,\ a_2$ *es una particin de* a.

(2) $b_1,\ b_2$ *es una particin de* b.

(3) $f[a_1] = b_1$ *y* $g[b_2] = a_2$.

Ejercicio 108. *Sea* a *un conjunto tal que para cada* $b \in a$ *existe* $c \in a$ *que no es equivalente a ningn subconjunto de* b. *Probar que* $\bigcup a$ *no es equivalente a ningn elemento de* a *ni a ningn subconjunto de ningn elemento de* a.

Ejercicio 109. *Sean* a *y* b *conjuntos no vacíos. Consideremos los enunciados siguientes:*

(a) *existe una aplicacin inyectiva de* a *en* b, $a \preceq b$.

(b) *existe una aplicacin sobreyectiva de* a *en* b, $a \preceq^* b$.

Cul es la relacin entre (a) y (b)? si b *es bien ordenable?.*

Ejercicio 110.

(1) *Hallar* $cf(\omega \cdot 3)$, $cf(\omega^3)$, $cf((\omega^\omega)^\omega)$.
(2) *Demostrar que si* $\gamma < \omega_1$, *entonces* γ *es un ordinal límite si y slo si* $cf(\gamma) = \omega$.
(3) *Dar ejemplos de ordinales singulares* α *tales que* $|\alpha| = 1$ *y* $cf(\alpha) = \omega_1$.
(4) *Dar ejemplos de ordinales singulares* α *tales que* $|\alpha| = 1$ *y* $cf(\alpha) = \omega$.

Ejercicio 111. *Demostrar que si* γ *es una cardinal límite no numerable, entonces existe una* $cf(\gamma)$*-sucesin* $\langle \alpha : \alpha < cf(\gamma) \rangle$ *de cardinales tal que*

$$\gamma = sup(\{\alpha : \ \alpha < cf(\gamma)\})$$

Ejercicio 112. *Probar que para cada ordinal* α

(1) *existe un cardinal singular* $\kappa > \alpha$.
(2) *existe un cardinal* $\kappa > \alpha$ *tal que* $cf(\kappa) = \omega$.

Ejercicio 113.

(1) *Sea* P *una particin de un conjunto* A. *Demostrar que:*
$$\mathcal{P}(P) \preceq \mathcal{P}(A), \quad P \preceq \mathcal{P}(A), \quad P \not\sim \mathcal{P}(A)$$
(2) *Sea* A *un conjunto numerable. Probar que el conjunto de las particiones de* A *es equivalente a* $\mathcal{P}(\omega)$.
(3) *Probar que: si existe* $f : \omega_\alpha \longrightarrow a$ *suprayectiva, entonces* $a \preceq \omega_\alpha$.

Ejercicio 114 (AC). *Hallar* $\displaystyle\prod_{0<\alpha<\omega_1} |\alpha|$.

Ejercicio 115 (AC). *Comprobar que:*

(1) $\omega 1 = \omega 0 \cdot 21$.
(2) *si* $\alpha < \omega_1$, $\alpha 1 = \alpha 0 \cdot 21$.
(3) *si* $\alpha < \omega_2$, $\alpha 2 = \alpha 1 \cdot 21$.
(4) $\omega < 20 \quad \Longrightarrow \quad \omega 0 = 20$.
(5) $21 = 2 \ \wedge \ \omega_1 < \omega 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega_1 1 = \omega 0$.
(6) $21 = 2 \quad \Longrightarrow \quad \omega 0 \neq \omega_1$.
(7) $n \in \omega \quad \Longrightarrow \quad 20 \neq \omega \cdot n$.
(8) $n, m \in \omega \quad \Longrightarrow \quad 2m \neq \omega \cdot n$.
(9) $n \in \omega \quad \Longrightarrow \quad 2n \neq \omega^2$.
(10) $\forall \ n \in \omega \ (2n = \omega + n + 1) \quad \Longrightarrow \quad \omega 0 < 2\omega$.
(11) $\alpha = \beta + 1 \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{\delta < \alpha} \delta = \beta$.
(12) α *límite* $\quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{\delta < \alpha} \delta = \alpha$.

Ejercicio 116 (AC). *Probar que:*

(1) $\beta < \alpha \implies |\omega_\alpha - \omega_\beta| = \alpha$.
(2) $|\{x \subseteq \omega_\alpha : \ |x| < 0\}| = \alpha$.
(3) $|\{x \subseteq \omega_1 : \ |x| = 0\}| = 20$.
(4) $|\{x \subseteq \omega_1 : \ |x| = 1\}| = 21$.
(5) $\beta \leq 20 \implies |\{x \subseteq \omega_\beta : \ |x| = 0\}| = 20$.
(6) $2 \times \omega_\beta \sim \omega_\beta$.
(7) $|\{x \subseteq \omega_\beta : |x| = \beta\}| = 2\beta$.

Ejercicio 117 (AC). *Probar que existe un cardinal* $\kappa > 0$ *tal que* $\forall\ \lambda < \kappa\ (2\lambda < \kappa)$.

Ejercicio 118 (AC). *Probar que* $\{\kappa \in \mathbf{In} : \ \kappa = \kappa 0\}$ *es una clase propia.*

Ejercicio 119 (AC). *Sea* κ *un cardinal. Diremos que* $A \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ *es una familia casi disjunta sobre* κ *si:*

(a) $x \in A \ \rightarrow \ |x| = \kappa$.
(b) $x, y \in A$ *con* $x \neq y \implies |x \cap y| < \kappa$.

(1) *Sea* $I = \{x \subseteq \omega : \ x \text{ finito}\}$. *Probar que* $|I| = 0$.
(2) *Sea* $x \subseteq \omega$. *Definimos* $x^* = \{x \cap n : \ n \in \omega\}$. *Probar que:*
  (2.1) $|x| = 0 \implies |x^*| = 0$.
  (2.2) $x \neq y \implies |x^* \cap y^*| < 0$.
(3) *Sea* $B = \{x^* : \ x \subseteq \omega \wedge |x| = 0\}$. *Probar que* $|B| = 20$.
(4) *Probar que existe una familia casi disjunta sobre* ω, A, *tal que* $|A| = 20$.
  (Sugerencia) Sea $f : I \longrightarrow \omega$ *biyectiva: Tomar* $A = \{f[b] : \ b \in B\}$.
(5) *Probar que si* $20 = 1$, *existe una una familia casi disjunta sobre* 1.
  (Sugerencia) Tomar $I = \{x \subseteq \omega_1 : sup(x) < \omega_1\}$.
(6) *Probar que si* $\kappa \geq 0$ *y* $2\kappa = \kappa$, *existe una familia casi disjunta sobre* κ *de cardinal* 2κ.

Ejercicio 120. *Sea* $\langle \kappa_i : i \in \lambda \rangle$ *una familia creciente de cardinales distintos de* 0. *Probar que:*

$$\sum_{i \in \lambda} \kappa_i < \prod_{i \in \lambda} \kappa_i$$

Ejercicio 121. *Para cada cardinal* $\mathbf{a}$ *definimos el factorial de* $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}!$, *como sigue: sea* A *un conjunto de cardinal* $\mathbf{a}$,

$$\mathbf{a}! = |\{f : \ f : A \longrightarrow A \text{ biyectiva}\}|$$

Probar que:

(1) $\mathbf{a}!$ *est bien definido. Esto es, no depende del conjunto* A *considerado.*
(2) **(AC)** κ *infinito* $\implies \kappa! = 2\kappa$.

Ejercicio 122 (AC). *Probar que:*

(1) $\prod\limits_{n\in\omega} n = \omega 0.$

(2) $\prod\limits_{\alpha\in\omega\cdot 2} \alpha = \omega \cdot 20.$

(3) $\prod\limits_{\alpha\in\omega_1+\omega} \alpha = \omega_1 + \omega 0.$

Ejercicio 123 (AC). *Probar que:*

(1) $\forall\ n \in \omega\ (\alpha \leq \beta + n\ \rightarrow \alpha\beta = 2\beta \cdot \alpha).$

(2) Para cualesquiera $\alpha,\ \beta,\ \delta$ *si* $|\delta| \leq \beta$*, entonces*

$$\alpha + \delta\beta = \alpha\beta \cdot \alpha + \delta|\delta|$$

Ejercicio 124 (AC). *Sea* γ *un ordinal límite y sea* $\langle\delta_\alpha : \alpha < \gamma\rangle$ *una* γ*-sucesin creciente de ordinales tal que* $\tau = sup(\{\delta_\alpha :\ \alpha < \gamma\})$*. Probar que para todo* β *tal que* $cf(\gamma) > \beta$

$$\tau\beta = \sum_{\alpha<\gamma} \delta_\alpha\beta$$

Ejercicio 125 (AC). *Sea* α *un ordinal de la forma* ω^β *(exponenciacin ordinal). Sea* $\langle\kappa_\delta : \delta < \alpha\rangle$ *una* α*-sucesin no decreciente de cardinales con* $\kappa_0 > 0$*. Probar que:*

$$\prod_{\delta<\alpha} \kappa_\delta = (sup(\{\kappa_\delta : \delta < \alpha\}))^{|\alpha|}$$

Dar un ejemplo en el que esta igualdad falla si α *es un ordinal límite que no es de la forma* ω^β

Ejercicio 126 (AC). *Sea* $\mathbf{B} : \mathbf{Ord} \longrightarrow \mathbf{In}$ *la funcin definida por:*

$$\mathbf{B}(\alpha)\ =\ \begin{cases} 0, & si\ \alpha = 0 \\ 2\mathbf{B}(\beta), & si\ \alpha = \beta + 1 \\ sup(\{\mathbf{B}(\beta) :\ \beta < \alpha\}), \quad si\ \alpha\ es\ límite & \end{cases}$$

(1) Demostrar que para todo $\alpha,\ \beta$

(1.1) $\mathbf{B}(\alpha) + \mathbf{B}(\beta) = \mathbf{B}(\alpha) \cdot \mathbf{B}(\beta) = \mathbf{B}(max(\alpha, \beta)).$

(1.2) $\alpha \leq \beta \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{B}(\beta) = \mathbf{B}(\beta + 1).$

(1.3) $\alpha + 1 > \beta \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B}(\alpha + 1)\mathbf{B}(\beta) = \mathbf{B}(\alpha + 1).$

(1.4) Se puede dar alguna expresin "razonable" para $\mathbf{B}(\alpha)\mathbf{B}(\beta)$ *con* α *límite y* $\beta < \alpha$*?*

(2) Para todo $\alpha,\ \beta$ *determinar en* **ZFC + GCH** *los valores de:*

(2.1) $\mathbf{B}(\alpha)\!<\mathbf{B}(\beta).$

(2.2) $sup(\{\kappa\mathbf{B}(\beta) : \kappa < \mathbf{B}(\alpha)\}).$

(3) Sea $F : \mathbf{Ord} \longrightarrow \mathbf{Ord}$ *la funcin definida por: para cada* α

$$\mathbf{B}(\alpha) = F(\alpha)$$

Es F *creciente? Continua? Y en* **(ZFC + GCH)***?*

Ejercicio 127 (AC). *Dados α, β y γ consideremos el conjunto*

$F(\alpha,\beta,\gamma) = \{f :\ f$ *es una aplicacin* $\wedge dom(f) \subseteq \omega_\alpha \ \wedge\ |dom(f)| < \gamma \ \wedge rang(f) \subseteq \omega_\beta\}$

(1) *Calcular* $|F(\alpha,\beta,\gamma)|$.
(2) *Calcular* $|F(\alpha,\beta,\gamma)|$ *suponiendo* **GCH**.

Ejercicio 128. *Probar que:*
(1) $|\{r :\ r$ *es un orden lineal de* $\omega\}| = 20$.
(2) $|\{r :\ r$ *es un orden lineal de* $\kappa\}| = 2\kappa$.

Ejercicio 129 (AC). *Probar que las condiciones siguientes son equivalentes.*
(1) (**CH**). *(2)* $10 = 1$. *(3)* $10 < 20$.

Ejercicio 130 (AC). *Suponiendo* **(GCH)** *determinar:*
(1) 50. *(2)* 00. *(3)* 0ω. *(4)* 12.
(5) $\omega 0$. *(6)* 97. *(7)* 79. *(8)* $\omega\omega \cdot 2$.
(9) $\omega \cdot 2\omega$. *(10)* $\omega_1\omega \cdot 2$. *(11)* $\omega^2 + \omega 0$. *(12)* $\aleph_{\omega_\omega}\omega^2$.

Ejercicio 131 (AC). *Probar que las condiciones siguientes son equivalentes:*
(1) **GCH**.
(2) $\forall\ \kappa,\lambda \in$ **In** $(\kappa = \lambda \ \leftrightarrow\ 2\kappa = 2\lambda)$.
(3) $\forall\ \kappa,\lambda \in$ **In** $(\kappa < \lambda \ \leftrightarrow\ 2\kappa < 2\lambda)$.
(4) $\forall\ \alpha,\beta \in$ **Ord** $(\alpha$ *sucesor* $\ \rightarrow\ \alpha\beta = max(\alpha,\beta+1))$.

Ejercicio 132 (AC). *Probar que las tres condiciones siguientes son equivalentes a* **GCH**.
(1) $\forall\ \alpha \in$ **Ord** $(\alpha+1\alpha = \alpha+1)$.
(2) $\forall\ \alpha \in$ **Ord** $(\alpha+1\alpha < \alpha+2\alpha)$.
(3) $\forall\ \alpha \in$ **Ord** $(\alpha+1< \alpha+1 = \alpha+1)$.

Ejercicio 133. *Sea* $\mathbf{a} \in$ **Cn**, *por* $\mathbf{AC^a}$ *notaremos*

$$\forall\ y \in x\ (|y| = \mathbf{a})\ \rightarrow\ \exists\ f\ (FE(f,x))$$

(1) *Sea* x *un conjunto tal que* $\forall\ y \in x\ (|y| = 4)$.
(1.1) *Para cada* $y \in x$, *sea* $y^* = \{z \subseteq y : z \sim 2\}$. *Probar que* $|y^*| = 6$.
(1.2) *Sea* f *una funcin de eleccin sobre* $\bigcup\{y^* : y \in x\}$. *Si* $a \in y \in x$ *sean*

$$n_a = |\{z \in y^* :\ f(z) = a\}|, \quad n_y = sup(\{n_b :\ b \in y\}), \quad y' = \{a \in y :\ n_a = n_y\}$$

Probar que: $\displaystyle\sum_{a\in y} n_a = 6; \quad 2 \le n_y \le 3; \quad 1 \le |y'| \le 3.$

(1.3) *Probar que la aplicacin* g *con* $dom(g) = x$ *definida por*

$$g(y) \ =\ \begin{cases} a & si\ |y'| = 1 \wedge a \in y' \\ f(y') & si\ |y'| = 2 \\ a & si\ |y'| = 3 \wedge a \in y - y' \end{cases}$$

es una funcin de eleccin sobre x.
(2) *Probar que* $\mathbf{AC^2} \implies \mathbf{AC^4}$.

Ejercicio 134. *Sea* $0 < n, m \in \omega$. *Probar que:*

(1) $y \sim n \quad \Longrightarrow \quad y \times m \sim n \cdot m$.
(2) $\mathbf{AC^{n \cdot m}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{AC^{n}}$.
(3) $\mathbf{AC^{4}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{AC^{2}}$.

Ejercicio 135. *Sean* $0 < n \in \omega$, $p \in \omega$ *primo tal que* $p|n$ *y* x *un conjunto tal que para todo* $y \in x \;\; (y \sim n)$.

(1) *Sea* $y \in x$ *y* $y^* = \{z \subseteq y : \; z \sim p\}$. *Probar que:* $|y^*| = \binom{n}{p}$.
(2) *Sea* f *una funcin de eleccin sobre* $\bigcup\{y^* : \; y \in x\}$. *Si* $a \in y \in x$, *sean*

$$n_a = |\{z \in y^* : \; f(z) = a\}|; \quad n_y = sup(\{n_b : \; b \in y\}; \quad y' = \{a \in y : \; n_a = n_y\}$$

Probar que:

$$\sum_{a \in y} n_a = \binom{n}{p}; \quad \neg(n|\binom{n}{p}); \quad 1 \leq |y'| < n$$

(3) $\mathbf{AC^{p}} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, h_{n,p}\; (dom(h_{n,p}) = x \wedge \forall\, y \in x\; (\emptyset \neq h_{n,p}(y) \subset y))$.

Ejercicio 136.

(1) *Con la notacin del ejercicio anterior sea* $b = \{y' : \; y \in x\}$. *Para cada* $r \in \omega$ *con* $1 \leq r < n$ *sean* $b_r = \{y' \in b : \; y' \sim r\}$ *y* f_r *una funcin de eleccin sobre* b_r. *Consideremos la aplicacin* g *con* $dom(g) = x$ *definida por*

$$g(y) = f_r(y') \text{ si } |y'| = r$$

Probar que g *es una funcin de eleccin sobre* x.
(2) *Por induccin sobre* n *probar que:*

$$\forall\, p \leq n\; (p \text{ primo } \rightarrow \mathbf{AC^{p}}) \quad \Longrightarrow \quad \forall\, m \leq n\; (\mathbf{AC^{m}})$$

(3) $\forall\, p\; (p \text{ primo } \rightarrow \mathbf{AC^{p}}) \quad \Longrightarrow \quad \forall\, n\; \mathbf{AC^{n}}$.
(4) $\forall\, p \leq n\; (p \text{ primo } \rightarrow \mathbf{AC^{p}}) \quad \Longrightarrow \quad \forall\, m \leq 2 \cdot n + 1\; (m \text{ no primo } \rightarrow \mathbf{AC^{m}})$.
(Sugerencia) Si $n < m$, *sea* $p = inf(\{q : \; q \text{ primo } \wedge q|m\}$. *Considerar* $h_{m,p}$.
(5) $\mathbf{AC^{2}} \wedge \mathbf{AC^{3}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{AC^{6}}$.
(6) $\mathbf{AC^{2}} \wedge \mathbf{AC^{3}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{AC^{8}}$.
(7) $\mathbf{AC^{2}} \wedge \mathbf{AC^{5}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{AC^{8}}$.
(8) $\mathbf{AC^{10}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{AC^{8}}$.
(9) $\mathbf{AC^{2}} \wedge \mathbf{AC^{3}} \wedge \mathbf{AC^{5}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{AC^{15}}$.

Ejercicio 137. *Consideremos las siguientes proposiciones:*

$$(a)\; \forall\, x\; \exists < \;\; (x < \text{ orden lineal})$$

$$(b)\; \forall <' \;\; (x <' \text{ orden parcial}) \rightarrow \exists\, t \subseteq x \begin{cases} (t \text{ maximal (respecto de } \subseteq)) \\ \wedge \\ \forall\, z, y \in t\; (z \neq y \; \rightarrow \; z \not<' y \wedge y \not<' z) \end{cases}$$

Probar que: $\mathbf{AC} \quad \Longleftrightarrow \quad (a) \wedge (b)$.