Teoría de conjuntos

José A. Alonso Jiménez
Sevilla, Octubre de 1997

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Contenido

Capítulo 1

Conjuntos y clases

1.1 El lenguaje de la Teoría de Conjuntos. Clases

Nota. 1.1.1 *Intuitivamente, un conjunto es una colección de objetos que verifican una propiedad. El objetivo de esta sección es precisar el concepto de propiedad.*

Definición. 1.1.2 *El* **lenguaje** *de la teoría de conjuntos está formado por un conjunto de símbolos, que son comunes a todos los lenguajes de primer orden y se llaman* **símbolos lógicos***:*

1. *Variables individuales:* $x, y, z, \ldots$ *con o sin subíndices,*
2. *Conectivas:* $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$,
3. *Cuantificadores:* $\forall$ *(universal),* $\exists$ *(existencial),*
4. *Predicado de igualdad:* $=$,

junto con un símbolo **no lógico***, el predicado de pertenencia:* $\in$.

Definición. 1.1.3 *Las* **fórmulas** *de la teoría de conjuntos se definen recursivamente por:*

1. *Si* x, y *son variables, entonces* $x = y$, $x \in y$ *son fórmulas.*
2. $\neg\varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi$ *y* $\varphi \rightarrow \psi$ *son fórmulas*
3. *Si* x *es una variable y* φ *una fórmula, entonces* $\exists x\varphi$ *y* $\forall x\varphi$ *son fórmulas.*

Notación. 1.1.4

1. *Usaremos las letras* φ, ψ, θ *como metavariables sobre fórmulas.*

2. *Escribiremos* $x \neq y$, $x \notin y$ *como abreviaturas de* $\neg(x = y)$ *y* $\neg(x \in y)$*, respectivamente.*

Definición. 1.1.5 *La variable* x *ocurre libre en* φ *si se verifica una de las siguientes condiciones:*

1. φ *es* $x = y$, $y = x$, $x \in y$ *ó* $y \in x$.

2. φ *es* $\neg\psi$ *y* x *ocurre libre en* ψ.

3. φ *es* $\psi \vee \theta$, $\psi \wedge \theta$ *ó* $\psi \to \theta$ *y* x *ocurre libre en* ψ *ó en* θ.

4. φ *es* $\forall y \psi$ *ó* $\exists y \psi$ *donde* y *no es* x *y* x *ocurre libre en* ψ.

Notación. 1.1.6 *Mediante* $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *representaremos una fórmula en la que las variables* $x_1, \dots, x_n$ *ocurren libres. En el mismo contexto en que hayamos escrito* $\varphi(x_1, \dots, x_n)$*, escribiremos* $\varphi(y_1, \dots, y_n)$ *para designar la fórmula que resulta de sustituir en la fórmula* $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *las variables* $x_1, \dots, x_n$ *por* $y_1, \dots, y_n$*, respectivamente.*

Nota. 1.1.7 *El axioma–esquema de* **comprehensión** *(*Frege 1893*) es el siguiente: Para cada fórmula* $\varphi(x)$ *en la que* y *no ocurre libre,*

$$(\exists y)(\forall x)[x \in y \leftrightarrow \varphi(x)]$$

es un axioma. Este axioma es un intento de formalización del concepto intuitivo de conjunto de 1.1.1.

Teorema. 1.1.8 *(*Russell 1903*)*

$$\neg(\exists y)(\forall x)[x \in y \leftrightarrow x \notin x]$$

Corolario. 1.1.9 *El axioma de comprehensión (1.1.7) no es válido.*

Notación. 1.1.10 *Para cada fórmula* $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$ *se introduce el símbolo de clase*

$$\{x : \varphi(x, y_1, \dots, y_n)\}$$

que se lee "la **clase** *de los* x *tales que* $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$*". Usaremos letras latinas mayúsculas para representar clases. Sean* A *y* B *las clases* $\{x : \varphi(x)\}$ *y* $\{x : \psi(x)\}$*, respectivamente.*

- *$x \in A$ representará $\varphi(x)$ ($x \notin A$ representará $\neg\varphi(x)$).*
- *$A = B$ representará $\forall x[\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)]$ ($A \neq B$ representará $\neg A = B$).*
- *$A \subseteq B$ representará $\forall x[\varphi(x) \rightarrow \psi(x)]$ (y $A \subset B$ representará $A \neq B \wedge A \subseteq B$)*
- *$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ y $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.*
- *$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.*
- *$\bigcup A = \{x : (\exists y)[x \in y \wedge y \in A]\}$, y $\bigcap A = \{x : (\forall y)[y \in A \rightarrow x \in y)\}$.*

Si A es la clase $\{x : \varphi(x)\}$. Escribiremos

1. *A es un* **conjunto** *en lugar de $(\exists y)(\forall x)[x \in y \leftrightarrow \varphi(x)]$.*
2. *A es una* **clase propia** *en lugar de $\neg(\exists y)(\forall x)[x \in y \leftrightarrow \varphi(x)]$.*

Lema–Definición. 1.1.11 *La clase de Russell, definida por $R = \{x : x \notin x\}$ es una clase propia*

Definición. 1.1.12 *La* **clase universal** *es* $\mathbf{V} = \{x : x = x\}$.

1.2 Axiomas del vacío, extensionalidad y separación

Axioma 1.2.1 del conjunto vacío: *Existe un conjunto que no tiene elementos; i.e*

$$(\exists y)(\forall x)[x \notin y].$$

Axioma 1.2.2 de extensionalidad *(*FREGE *1893,* ZERMELO *1908): Si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces son iguales; i.e.*

$$(\forall x)(\forall y)[(\forall z)[z \in x \leftrightarrow z \in y] \rightarrow x = y]$$

Notación. 1.2.3 *Escribiremos $(\exists! x)\varphi(x)$ (léase: existe un único x tal que $\varphi(x)$), en lugar de*

$$(\exists x)[\varphi(x)] \wedge (\forall x)(\forall y)[\varphi(x) \wedge \varphi(y) \rightarrow x = y].$$

Lema. 1.2.4 $(\exists! y)(\forall x)[x \notin y]$.

Definición. 1.2.5 *El* **conjunto vacío** *se define por:*

$$\emptyset = y \leftrightarrow (\forall x)[x \notin y].$$

Axioma 1.2.6 –esquema de separación *(*Zermelo *1908): Sea $\varphi(x)$ una fórmula en la que y no ocurre libre. Para cada conjunto z,*

$$\{x : x \in z \wedge \varphi(x)\}$$

es un conjunto; i.e.

$$(\forall z)(\exists y)(\forall x)[x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi(x)].$$

Nota. 1.2.7 *Si en el axioma de separación se permite que la variable y no ocurre libre en $\varphi(x)$, entonces $(\forall x)[x = \emptyset]$.*

Teorema. 1.2.8 *El axioma del conjunto vacío es consecuencia del de separación.*

Lema. 1.2.9 *Sea $\varphi(x)$ una fórmula en la que y no esté libre. Entonces,*

$$(\forall z)(\exists! y)(\forall x)[x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi(x)].$$

Notación. 1.2.10 *Escribiremos $\{x \in z : \varphi(x)\}$ en lugar de $\{x : x \in z \wedge \varphi(x)\}$*

Teorema. 1.2.11 *Sea $A = \{x : \varphi(x)\}$. Si*

$$(\exists y)(\forall x)[\varphi(x) \to x \in y],$$

entonces A es un conjunto.

Teorema. 1.2.12 $\mathbf{V}$ *es una clase propia.*

Lema–Definición. 1.2.13 *Sean x, y, z conjuntos.*

1. *La clase $x - y$ definida por $\{z : z \in x \wedge z \notin y\}$ es un conjunto, que llamaremos la* **diferencia** *de x e y.*
2. *La clase $x \cap y$ definida por $\{z : z \in x \wedge z \in y\}$ es un conjunto, que llamaremos la* **intersección** *de x e y.*

Lema–Definición. 1.2.14 *La* **intersección** *de x es*

$$\bigcap x = \{z : (\forall u)[u \in x \to u \in z]\}.$$

Si $x \neq \emptyset$, entonces $\bigcap x$ es un conjunto.

Lema. 1.2.15

1. *Si* $A \neq \emptyset$*, entonces* $\bigcap A$ *es un conjunto.*

2. $\emptyset = \{x : x \neq x\}$.

3. $\bigcap \emptyset = V$.

Definición. 1.2.16 *Los conjuntos* x *e* y *son* **disjuntos** *si* $x \cap y = \emptyset$.

Nota. 1.2.17 *Con los axiomas anteriores sólo puede demostrarse la existencia del conjunto vacío.*

1.3 Los axiomas del par, de la unión y de las partes

Axioma 1.3.1 del par: *Para todo* $x,\ y$ *la clase* $\{u : u = x \vee u = y\}$ *es un conjunto; i.e.*

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)[u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y]$$

Definición. 1.3.2

1. $\{x, y\} = \{u :\ u = x \vee u = y\}$.

2. $\{x\} = \{x, x\}$.

Notas. 1.3.3

1. $\bigcap\{x\} = x$ *y* $\bigcap\{x, y\} = x \cap y$.

2. *Con los axiomas anteriores se puede demostrar la existencia de infinitos conjuntos:*
   $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, ...; *pero todos tiene como máximo dos elementos.*

Axioma 1.3.4 de la unión: *Para cada conjunto* x *la clase*

$$\{z : (\exists u)[z \in u \wedge u \in x]\}$$

es un conjunto; i.e.

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)[z \in y \leftrightarrow (\exists u)[z \in u \wedge u \in x]]$$

Definición. 1.3.5

1. *La* **unión** *de x es* $\bigcup x = \{z : (\exists u)[z \in u \wedge u \in x]\}$

2. *La* **unión** *de x e y es* $x \cup y = \bigcup\{x, y\}$

Proposición. 1.3.6

1. $\bigcup \emptyset = \emptyset$

2. $\bigcup\{x\} = x$

3. $x \cup y = \{z : z \in x \vee z \in y\}$

Definición. 1.3.7 $\{a, b, c\} = \{a, b\} \cup \{c\}$.

Notas. 1.3.8 *Análogamente a 1.4.8, pueden definirse $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, d, e\}$, ... Con los axiomas anteriores puede demostrarse la existencia de los conjuntos $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ... que tienen 0, 1, 2, ... elementos.*

Definición. 1.3.9

- *Diremos x es un* **subconjunto** *de y (y lo notaremos por $x \subseteq y$) si $(\forall z)[z \in x \rightarrow z \in y]$.*

- *Diremos x es un* **subconjunto propio** *de y (y lo notaremos por $x \subset y$) si $x \subseteq y \wedge x \neq y$.*

Axioma 1.3.10 de las partes *(*ZERMELO *1908):*
Para todo conjunto x, la clase $\{z : z \subseteq x\}$ es un conjunto; i.e

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)[z \in y \leftrightarrow z \subseteq x]$$

Definición. 1.3.11 *El* **conjunto partes** *de x es* $\mathbf{P}(x) = \{z : z \subseteq x\}$.

Capítulo 2

Relaciones y aplicaciones. El axioma de reemplazamiento

2.1 Par ordenado y producto cartesiano

Definición. 2.1.1 *(*KURATOWSKI *1921) El* par ordenado *de x e y es*

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Proposición. 2.1.2

1. *Si $\{x, y\} = \{x, z\}$, entonces $y = z$.*
2. *Si $\langle x, y\rangle = \langle z, u\rangle$, entonces $x = z \wedge y = u$.*

Definición. 2.1.3 *Diremos que x es un* par ordenado $\leftrightarrow (\exists y)(\exists z)[x = \langle y, z\rangle]$.

Definición. 2.1.4 *Sea x un conjunto.*

1. *La* primera coordenada *de x es* $\Pi_1(x) = \{u : (\exists v)(\exists w)[x = \langle v, w\rangle \wedge u \in v]\}$
2. *La* segunda coordenada *de x es* $\Pi_2(x) = \{u : (\exists v)(\exists w)[x = \langle v, w\rangle \wedge u \in w]\}$

Proposición. 2.1.5

$$\Pi_1(x) = \begin{cases} y & \textit{si } (\exists z)[x = \langle y, z\rangle]; \\ \emptyset & \textit{en otro caso.} \end{cases} \qquad \Pi_2(x) = \begin{cases} z & \textit{si } (\exists y)[x = \langle y, z\rangle]; \\ \emptyset & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Notas. 2.1.6 *La Definición 2.1.1 puede extenderse como sigue:* $\langle x\rangle = x$, $\langle x,y,z\rangle = \langle\langle x,y\rangle,z\rangle$, $\langle x,y,z,w\rangle = \langle\langle x,y,z\rangle,w\rangle, ...$

Notación. 2.1.7 *Escribiremos* $\{\langle x,y\rangle : \varphi(x,y)\}$ *en lugar de*

$$\{z : (\exists x)(\exists y)[z = \langle x,y\rangle \wedge \varphi(x,y)]\}$$

Definición. 2.1.8 *El* producto cartesiano *de* x *e* y *es:*

$$x \times y = \{\langle u,v\rangle : u \in x \wedge v \in y\}$$

Proposición. 2.1.9 *Si* x *e* y *son conjuntos, entonces* $x \times y$ *es un conjunto.*

Definición. 2.1.10 $x^2 = x \times x$.

Nota. 2.1.11 *Análogamente se definen*

$$x \times y \times z = (x \times y) \times z, \quad x^3 = x^2 \times x$$

$$x \times y \times z \times u = (x \times y \times z) \times u$$

y así sucesivamente. Si A *y* B *son clases, se define*

$$A \times B = \{\langle u,v\rangle : u \in A \wedge v \in B\}, \text{ y } A^2 = A \times A$$

2.2 Relaciones. Aplicaciones. Familias

Definición. 2.2.1 *Un conjunto* r *es una* **relación** *si* $(\forall y)[y \in r \rightarrow y$ *es un par ordenado*$]$.

Notación. 2.2.2 *Si* r *es una relación, escribiremos* $x\ r\ y$ *en lugar de* $\langle x,y\rangle \in r$.

Definición. 2.2.3

1. *El* **dominio** *de* r *es* $dom(r) = \{x : (\exists y)[\langle x,y\rangle \in r]\}$
2. *El* **rango** *de* r *es* $rang(r) = \{y : (\exists x)[\langle x,y\rangle \in r]\}$
3. *El* **campo** *de* r *es* $campo(r) = dom(r) \cup rang(r)$

Lema. 2.2.4 *Si* r *es un conjunto, entonces* $dom(r)$, $rang(r)$ *y* $campo(r)$ *son conjuntos.*

Definición. 2.2.5 *Diremos que r es una* **relación en** x *si r es una relación y campo*$(r) \subseteq x$.

Ejemplos. 2.2.6

1. *La* **identidad** *en x, $I_x = \{\langle y, y\rangle : y \in x\}$, es una relación en x.*
2. *La* **pertenecia** *en x, $\in_x = \{\langle y, z\rangle : y \in x \wedge z \in x \wedge y \in z\}$ es una relación en x.*

Definición. 2.2.7

1. *La* **inversa** *de r es $r^{-1} = \{\langle y, x\rangle : \langle x, y\rangle \in r\}$*
2. *La* **imagen** *de x por r es $r[x] = \{y : (\exists z)[z \in x \wedge \langle z, y\rangle \in r]\}$*
3. *La* **imagen inversa** *de x por r es $r^{-1}[x] = \{y : (\exists z)[z \in x \wedge \langle y, z\rangle \in r]\}$*
4. *La* **composición** *de r y s es $s \circ r = \{\langle x, z\rangle : (\exists y)[\langle x, y\rangle \in r \wedge \langle y, z\rangle \in s]\}$*
5. *La* **restricción** *de r a x es $r \restriction x = \{\langle y, z\rangle : y \in x \wedge \langle y, z\rangle \in r\}$*

Lema. 2.2.8 *Si x, r y s son conjuntos, entonces r^{-1}, $r[x]$, $r^{-1}[x]$, $s \circ r$ y $r \restriction x$ son conjuntos*

Nota. 2.2.9 *La definición de relación binaria se puede generalizar. Por ejemplo:*

$$r \text{ es una relación ternaria } \leftrightarrow r \subseteq V^3.$$

Una clase R es una relación si $R \subseteq V^2$.

Definición. 2.2.10 *f es una* **aplicación** *(o función) si*

$$f \text{ es una relación } \wedge \ (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f \rightarrow y = z]$$

Definición. 2.2.11 *Sean f una aplicación y $x \in dom(f)$. El único y tal que $\langle x, y\rangle \in f$ se llama* **valor** *de f en x y se representa por $f(x)$ ó f_x.*

Definición. 2.2.12 *f es una* **aplicación de** x **en** y *si*

$$f \text{ es una aplicación} \wedge dom(f) = x \wedge rang(f) \subseteq y.$$

Notación. 2.2.13

1. *Por* $f : x \to y$ *se indica que* f *es una aplicación de* x *en* y.

2. *Por* $\langle f(a) : a \in x\rangle$ *ó* $\langle f_a : a \in x\rangle$ *se indica que* f *es una aplicación de dominio* x.

3. *Si* f *es una aplicación de dominio* x*, podemos representar el rango de* f *como*

$$\{f(a) : a \in x\} \text{ ó } \{f_a : a \in x\}$$

Nota. 2.2.14 *Sean* f *y* g *dos aplicaciones.*

$$f = g \iff dom(f) = dom(g) \wedge (\forall x)[x \in dom(f) \to f(x) = g(x)]$$

Definición. 2.2.15 *Sea* $f : x \to y$. *Diremos que* f *es:*

1. **Suprayectiva** $\leftrightarrow rang(f) = y$.

2. **Inyectiva** $\leftrightarrow (\forall z, u \in x)[f(z) = f(u) \to z = u]$.

3. **Biyectiva** $\leftrightarrow f$ *suprayectiva e inyectiva.*

Definición. 2.2.16 *El* **conjunto de aplicaciones** *de* x *en* y *es*

$$x^y = \{f : \ f \text{ es una aplicación de } x \text{ en } y\}$$

Proposición. 2.2.17 *Si* x*,* y *son conjuntos, entonces* x^y *es un conjunto.*

Proposición. 2.2.18 *Si* $f : x \to y$ *y* $g : y \to z$*, entonces* $g \circ f : x \to z$.

Notas. 2.2.19

1. *Las definiciones anteriores se pueden extender a clases.*

2. *Si* $F : V \to V$*, escribiremos* $\{F(x) : \varphi(x)\}$*, en lugar de*

$$\{y : (\exists x)[y = F(x) \wedge \varphi(x)]\}.$$

3. *Si* f *es una aplicación, entonces* $f[z] = \{f(a) : a \in z\}$ *y* $f^{-1}[z] = \{a : f(a) \in z\}$.

Definición. 2.2.20 *Sea* I *un conjunto. Una* **familia de conjuntos con índices en** I *es un aplicación* a *de dominio* I.

Notación. 2.2.21 *Si* a *una familia de conjuntos con índices en* I*, escribiremos* a_i *en lugar de* $a(i)$*, y* $(a_i)_{i\in I}$ *ó* $\langle a_i : i \in I\rangle$ *en lugar de* a.

Lema–Definición. 2.2.22 *Sea* $(a_i)_{i\in I}$ *una familia de conjuntos.*

1. *La* **unión** *de* $(a_i)_{i\in I}$*, definida por*

$$\bigcup_{i\in I} a_i = \{x : (\exists i \in I)[x \in a_i]\}$$

   es un conjunto.

2. *La* **intersección** *de* $(a_i)_{i\in I}$*, definida por*

$$\bigcap_{i\in I} a_i = \{x : (\forall i \in I)[x \in a_i]\}$$

   es un conjunto si y sólo si $I \neq \emptyset$.

3. *El* **producto cartesiano** *de* $(a_i)_{i\in I}$*, definida por*

$$\prod_{i\in I} a_i = \{x : (x \text{ es una aplicación }) \wedge dom(x) = I \wedge (\forall i \in I)[x(i) \in a_i]\}$$

   es un conjunto.

Notas. 2.2.23 *Sea* $(a_i)_{i\in I}$ *una familia de conjuntos.*

1. *Si para todo* $i \in I$, $a_i = b$, *entonces* $\prod_{i\in I} a_i = b^I$.
2. *Si* $\prod_{i\in I} a_i \neq \emptyset$, *entonces* $(\forall i \in I)[a_i \neq \emptyset]$.
3. *Con los axiomas estudiados hasta ahora, no se puede probar ni refutar el recíproco de (2).*

2.3 El axioma de reemplazamiento

Axioma 2.3.1 de reemplazamiento:
Si F *es una función y* u *es un conjunto, entonces la clase*

$$F[u] = \{F(y) : y \in u\}$$

es un conjunto.

Notas. 2.3.2

1. *La condición de ser función es necesaria.*

2. *Sin usar clases, el axioma de reemplazamiento puede formularse como sigue: Si $\varphi(x, y)$ es una fórmula y z es una variable que no ocurre libre en $\varphi(x, y)$, entonces*

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[\varphi(x,y)\wedge\varphi(x,y') \to y = y'] \to (\forall u)(\exists z)(\forall y)[y \in z \leftrightarrow (\exists x \in u)\varphi(x,y)]$$

es un axioma de reemplazamiento.

Proposición. 2.3.3

1. *El axioma de separación es consecuencia del axioma de reemplazamiento.*

2. *El axioma del par es consecuencia del axioma de reemplazamiento y del axioma de las partes.*

2.4 Relaciones de equivalencia (*)

Definición. 2.4.1

1. *r es* **reflexivo sobre** *x si $(\forall a \in x)[\langle a, a\rangle \in r]$.*

2. *r es* **simétrico** $(\forall a)(\forall b)[\langle a, b\rangle \in r \to \langle b, a\rangle \in r]$.

3. *r es* **transitivo** $(\forall a)(\forall b)(\forall c)[\langle a, b\rangle \in r \wedge \langle b, c\rangle \in r \to \langle a, c\rangle \in r]$

4. *r es de* **equivalencia** *en x si r es reflexiva sobre x, simétrica y transitiva.*

Nota. 2.4.2 *Si r es una relación en x simétrica y transitiva, entonces no se sigue necesariamente que r sea una relación de equivalencia en x.*

Nota. 2.4.3 *Las demostraciones de los siguientes resultados se proponen como ejercicios.*

Definición. 2.4.4 *Sea r una relación de equivalencia en x y $a \in x$. La* **clase de equivalencia** *de a módulo r es*

$$[a]_r = \{b : b \in x \wedge \langle a, b\rangle \in r\}$$

Proposición. 2.4.5 *Sea r una relación de equivalencia en x y $a, b \in x$.*

1. *$[a]_r$ es un conjunto.*

2. $\langle a,b\rangle \in r \leftrightarrow [a]_r = [b]_r$.

3. $\langle a,b\rangle \notin r \leftrightarrow [a]_r \cap [b]_r = \emptyset$.

Definición. 2.4.6 *Sea r una relación de equivalencia en x. El* **conjunto cociente** *de x por r es*

$$x/r = \{[a]_r : a \in x\}$$

Proposición. 2.4.7 *Si r una relación de equivalencia en x, entonces x/r es un conjunto.*

Definición. 2.4.8 *El conjunto p es una* **partición** *de x si*

1. $(\forall a \in p)[a \neq \emptyset]$.

2. $\bigcup p = x$

3. $(\forall a, b \in p)[a \neq b \to a \cap b = \emptyset]$.

Proposición. 2.4.9 *Si r una relación de equivalencia en x, entonces x/r es una partición de x.*

Definición. 2.4.10 *Sea p una partición de x. La* **relación definida** *por p es*

$$r_p = \{\langle a,b\rangle : (\exists y \in p)[a \in y \wedge b \in y]\}$$

Proposición. 2.4.11 *Sea p una partición de x.*

1. *r_p es una relación de equivalencia en x.*

2. $x/r_p = p$.

Definición. 2.4.12 *Sea p una partición de x. Se dice que y es un* **conjunto de representantes** *de p si*

$$(\forall a \in p)(\exists b \in y)[a \cap y = \{b\}]$$

Nota. 2.4.13 *Con los axiomas estudiados hasta ahora, no se puede demostrar, ni refutar, que para cada partición p de x, existe un conjunto de representantes de p.*

Capítulo 3

Relaciones de orden

3.1 Ordenes parciales. Ordenes totales

Definición. 3.1.1 *Sean A una clase y R una relación en A. Diremos que R es:*

1. **Irreflexiva** *en A si* $(\forall x \in A)[\langle x, x\rangle \notin A]$.
2. **Transitiva** *en A si* $(\forall x, y, z \in A)[\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \rightarrow \langle x, z\rangle \in R]$.
3. **Conexa** *si* $(\forall x, y \in A)[xRy \vee x = y \vee yRx]$.
4. *Un* **orden parcial** *en A si R es irreflexiva y transitiva en A.*
5. *Un* **orden total** *en A si R es un orden parcial y conexa en A.*

Notación. 3.1.2 *Escribiremos "$\langle A, R\rangle$ es una clase parcialmente ordenada" o "$\langle A, R\rangle$ es una CPO" en lugar de "A es una clase y R es un orden parcial en A". De manera análoga, escribiremos "$\langle A, R\rangle$ es una clase totalmente ordenada" o "$\langle A, R\rangle$ es una CTO" en lugar de "A es una clase y R es un orden total en A".*

Además, suele usarse el símbolo $<$ para representar relaciones de orden. De manera usual, se utilizan las notaciones

$$x \not< y \leftrightarrow \neg(x < y), \quad x \leq y \rightarrow x < y \vee x = y, \quad x > y \leftrightarrow y < x.$$

Definición. 3.1.3 *Sean $\langle A, <\rangle$ una CPO, $B \subseteq A$ y $b \in A$. Diremos que b es*

1. **Elemento maximal** *de B si* $b \in B \wedge (\forall x \in B)[b \not< x]$.
2. **Elemento minimal** *de B si* $b \in B \wedge (\forall x \in B)[x \not< b]$.

3. *El* **mayor elemento** *de* B *si* $b \in B \wedge (\forall x \in B)[x \leq b]$.

4. *El* **menor elemento** *de* B *si* $b \in B \wedge (\forall x \in B)[b \leq x]$.

Notas. 3.1.4 *Sean* $\langle A, < \rangle$ *una CPO y* $B \subseteq A$.

1. *Si* b *es el mayor elemento de* B*, entonces* b *es un elemento maximal de* B*. El recíproco no es válido.*

2. B *no tiene más de un mayor elemento.*

Definición. 3.1.5 *Sean* $\langle A, < \rangle$ *una CPO,* $B \subseteq A$ *y* $a \in A$*. Diremos que* a *es:*

1. *Una* **cota superior** *de* B *si:* $(\forall x \in B)[x \leq a]$.

2. *Una* **cota inferior** *de* B *si:* $(\forall x \in B)[a \leq x]$.

3. *El* **supremo** *de* B $(y = sup(B))$ *si:* a *es la menor cota superior de* B.

4. *El* **ínfimo** *de* B $(y = inf(B))$ *si:* a *es la mayor cota inferior de* B.

Notas. 3.1.6 *Sean* $\langle A, < \rangle$ *una CPO y* $B \subseteq A$.

1. B *tiene a lo sumo un supremo.*

2. *Si* b *es el mayor elemento de* B*, entonces* $b = sup(B)$.

3. *Si* $b = sup(B)$ *y* $b \in B$*, entonces* b *es el mayor elemento de* B.

Definición. 3.1.7 *Sean* $\langle A, < \rangle$ *una CPO y* $a, b \in A$.

1. a *es un* **predecesor** *de* b *(o* b *es un* **sucesor** *de* a*) si* $a < b$.

2. a *es un* **predecesor inmediato** *de* b *(o* b *es un* **sucesor inmediato** *de* a*) si* $a < b$ *y* $\neg(\exists c \in A)[a < c < b]$.

Definición. 3.1.8 *Sean* $\langle A, < \rangle$ *una CPO y* $x \in A$*. La* **sección inicial** *de* $\langle A, < \rangle$ *definida por* x *es* $A_x = \{y \in A : \ y < x\}$.

Definición. 3.1.9 *Sean* $\langle A, < \rangle$ *una CPO y* $B \subseteq A$.

1. B *es una* **sección inicial** *de* A *si* $(\exists x \in A)[B = A_x]$

2. B *es un* **segmento inicial** *de* A *si* $(\forall x, y \in A)[x \in B \wedge y < x \rightarrow y \in B]$.

Notas. 3.1.10 *Sean* $\langle A, < \rangle$ *una CPO y* $B \subseteq A$.

1. *Si* B *es una sección inicial de* A*, entonces* B *es un segmento inicial de* A.
2. *El recíproco no es válido.*

Definición. 3.1.11 *Sean* $\langle A, R\rangle, \langle B, S\rangle$ *CPO y* $F : A \rightarrow B$*. Diremos que* F *es:*

1. *Un* **homomorfismo** *de* $\langle A, R\rangle$ *en* $\langle B, S\rangle$ $(F : A \simeq B)$ *si*
$$(\forall x, y \in A)[xRy \rightarrow F(x)SF(y)]$$
2. **Creciente** *si* $(\forall x, y \in A)[xRy \leftrightarrow F(x)SF(y)]$
3. *Una* **inmersión** *de* $\langle A, R\rangle$ *en* $\langle B, S\rangle$ $(F : A \mathrel{\tilde{\subset}} B)$ *si* F *es inyectiva y creciente.*
4. *Un* **isomorfismo** *de* $\langle A, R\rangle$ *en* $\langle B, S\rangle$ $(F : A \cong B)$ *si* F *es biyectiva y creciente.*

Proposición. 3.1.12 *Sean* $\langle A, < \rangle$ *una CTO y* $B \subseteq A$.

1. b *es un elemento maximal de* B *si y sólo si* b *es el mayor elemento de* B.
2. b *es un elemento minimal de* B *si y sólo si* b *es el menor elemento de* B.

Proposición. 3.1.13 *Sean* $\langle A, < \rangle$ *una CTO y* $x, y \in A$*. Si* $x \neq y$*, entonces* $A_x \neq A_y$.

Proposición. 3.1.14 *Sea* $\langle A, < \rangle$ *una CTO. Si* B *y* C *son segmentos iniciales de* A*, entonces* $B \subseteq C$ *ó* $C \subseteq B$.

Corolario. 3.1.15 *Sea* $\langle A, < \rangle$ *una CTO. Si* B *y* C *son segmentos iniciales de* A*, entonces* B *es un segmento inicial de* C *ó* C *es un segmento inicial de* B.

Proposición. 3.1.16 *Sean* $\langle A, R\rangle$,$\langle B, S\rangle$ *CTO y* $F : A \rightarrow B$*. Son equivalentes:*

1. F *es un homomorfismo.*
2. F *es creciente.*
3. F *es una inmersión.*

Nota. 3.1.17 *Sean* $\langle A, R\rangle$,$\langle B, S\rangle$ *dos CPO isomorfas. Entonces* $\langle A, R\rangle$ *es CTO si y sólo si* $\langle B, S\rangle$ *es CTO.*

3.2 Buenos órdenes

Definición. 3.2.1 *Sea $\langle A, R\rangle$ una CPO. Diremos que R es:*

1. **Adecuada** *si $(\forall x \in A)[A_x$ es un conjunto$]$.*
2. *Un* **buen orden** *en A si R es adecuada en A y*

$$(\forall x)[x \subseteq A \wedge x \neq \emptyset \rightarrow (\exists b)[b \text{ es el menor elemento de } x]].$$

Notas. 3.2.2

1. *Si $\langle A, R\rangle$ es una CPO y A es un conjunto, entonces R es adecuada en A.*
2. *$\mathbb{N}$ con el orden usual está bien ordenado.*
3. *$\mathbb{Z}$ con el orden usual no está bien ordenado.*
4. *La relación R definida en $\mathbb{Z}$ por*

$$xRy \leftrightarrow |x| < |y| \vee (|x| = |y| \wedge x < y)$$

   es un buen orden en $\mathbb{Z}$.

5. *Escribiremos "$\langle A, R\rangle$ es una clase bien ordenada" o "$\langle A, R\rangle$ es una CBO" en lugar de "A es una clase y R es un buen orden en A".*
6. *Si $\langle A, R\rangle$ es una CBO, entonces $\langle A, R\rangle$ es CTO.*

Teorema 3.2.3 **(principio del menor elemento)**.
Sea $\langle A, <\rangle$ una CBO. Si $B \subseteq A$ y $B \neq \emptyset$, entonces B tiene un menor elemento.

Nota. 3.2.4 *Como consecuencia de la proposición anterior, el principio del menor elemento para una fórmula $\varphi(x)$ es*

$$(\exists x \in A\varphi(x)) \rightarrow (\exists x \in A)[\varphi(x) \wedge (\forall y \in A)[\varphi(y) \rightarrow x \leq y]]$$

Teorema 3.2.5 **(Principio de inducción)**. *Sea $\langle A, <\rangle$ una CBO*

1. *Si $B \subseteq A$ es tal que*

$$(\forall x \in A)[A_x \subseteq B \rightarrow x \in B]$$

   entonces $A = B$.

2. *Si $\varphi(x)$ es una fórmula y*

$$(\forall x \in A)[(\forall y \in A)[y < x \to \varphi(y)] \to \varphi(x)]$$

entonces $(\forall x \in A)\varphi(x)$.

Definición. 3.2.6 *Sea $\langle A, <\rangle$ una CPO y $B \subseteq A$. B es* **inductiva** *en A si*

$$(\forall x \in A)[A_x \subseteq B \to x \in B]$$

Nota. 3.2.7 *El principio de inducción afirma que Si $\langle A, <\rangle$ es una CBO y $B \subseteq A$ es inductiva en A, entonces $B = A$.*

Proposición. 3.2.8 *Sea $\langle A, <\rangle$ una CTO. Si A es la única clase inductiva en A y $<$ es adecuada en A, entonces $\langle A, <\rangle$ es un CBO.*

Proposición. 3.2.9 *Sea $\langle A, <\rangle$ una CBO. Si B es un segmento inicial de A, entonces $B = A$ o B es una sección inicial de A.*

Notación. 3.2.10 *Sea $\langle A, R\rangle$ una CBO y $B \subseteq A$. Normalmente escribiremos $\langle B, R\rangle$ en lugar de $\langle B, R \cap (B \times B)\rangle$.*

Teorema. 3.2.11 *Sea $\langle A, <\rangle$ una CBO y $F : A \to A$. Si F es creciente, entonces $(\forall x \in A)[x \leq F(x)]$.*

Corolario. 3.2.12 *Sea $\langle A, <\rangle$ una CBO.*

1. *Si $B \subseteq A$ está estrictamente acotada (es decir, $(\exists a \in A)(\forall b \in B)[b < a]$), entonces $\langle A, <\rangle$ y $\langle B, <\rangle$ no son isomorfas.*

2. *No existe ningún $x \in A$ tal que $\langle A, <\rangle \cong \langle A_x, <\rangle$.*

3. *Si $F : A \cong A$, entonces $F = I_A$.*

4. *Si $\langle A, <\rangle \cong \langle B, <'\rangle$, entonces sólo hay un isomorfismo entre ellas.*

Lema. 3.2.13 *Si $\langle A, <\rangle$ y $\langle B, <'\rangle$ son CBO y $F : A \cong B$, entonces*

$$(\forall x \in A)[F \restriction A_x : A_x \cong B_{F(x)}]$$

***Teorema 3.2.14* de comparación de buenos órdenes**. *Sean $\langle A, <\rangle$ y $\langle B, <'\rangle$ CBO. Se verifica una, y sólo una, de las siguientes condiciones :*

1. $\langle A, < \rangle \cong \langle B, <' \rangle$.
2. $(\exists! y \in B)[\langle A, < \rangle \cong \langle B_y, <' \rangle]$.
3. $(\exists! x \in A)[\langle A_x, < \rangle \cong \langle B, <' \rangle]$.

Definición. 3.2.15 *Diremos que una clase A es* **bien ordenable** *si existe una relación de buen orden en A.*

Nota. 3.2.16 *Con los axiomas estudiados hasta ahora, no se puede demostrar ni refutar que todo conjunto sea bien ordenable.*

Capítulo 4

La clase de los Ordinales

4.1 Conjuntos transitivos

Definición. 4.1.1 *Un conjunto x es* **transitivo** *si* $(\forall y, z)[y \in z \in x \to y \in x]$.

Nota. 4.1.2 *La definición se puede extender a clases.*

Proposición. 4.1.3 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *x es transitivo.*
2. $(\forall y \in x)[y \subseteq x]$.
3. $\bigcup x \subseteq x$.
4. $x \subseteq \mathbf{P}(x)$.

Ejemplos. 4.1.4 *Los conjuntos $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. son transitivos, y no lo son: $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$.*

Proposición. 4.1.5 *Sea x un conjunto cuyos elementos son conjuntos transitivos.*

1. *$\bigcup x$ es transitivo.*
2. *Si $x \neq \emptyset$, entonces $\bigcap x$ es transitivo.*

Definición. 4.1.6 *El* **sucesor** *del conjunto x es $x^+ = x \cup \{x\}$.*

Lema. 4.1.7 *Si x es un conjunto transitivo, entonces x^+ es transitivo.*

4.2 Ordinales

Definición. 4.2.1

1. *Un conjunto x es un* **ordinal** *si es transitivo y $\langle x, \in_x \rangle$ es un conjunto bien ordenado.*

2. $\mathbf{Ord} = \{x : x \text{ es un ordinal}\}$.

Ejemplos. 4.2.2

1. $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ *son ordinales.*

2. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ *no es un ordinal.*

Notación. 4.2.3 *Usaremos $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ como variables sobre ordinales, y escribiremos*

$$(\forall\alpha)\varphi(\alpha) \text{ en lugar de } (\forall x)[x \in \mathbf{Ord} \to \varphi(\alpha)]$$

$$(\exists\alpha)\varphi(\alpha) \text{ en lugar de } (\exists x)[x \in \mathbf{Ord} \wedge \varphi(\alpha)]$$

Proposición. 4.2.4

1. $\emptyset \in \mathbf{Ord}$.

2. $(\forall\alpha)[\alpha \notin \alpha]$.

3. *Todo elemento de un ordinal es un ordinal.*

4. *Si $\alpha \in \mathbf{Ord}$, entonces $\alpha^+ \in \mathbf{Ord}$.*

Definición. 4.2.5

1. $0 = \emptyset^+, 1 = 0^+, 2 = 1^+, \ldots, n+1 = n^+$.

2. $\alpha + 1 = \alpha^+$.

Nota. 4.2.6 *Se verifica que $1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, \ldots, n+1 = \{0, 1, \ldots, n\}$, y que $0, 1, 2, \ldots \in \mathbf{Ord}$.*

Proposición. 4.2.7

1. *Si $\alpha^+ = \beta^+$, entonces $\alpha = \beta$.*

2. *Si $x \subseteq \alpha$ transitivo, entonces $x = \alpha$ ó $x \in \alpha$.*

3. *Si x es un subconjunto transitivo de un ordinal, entonces x es un ordinal.*

4.3 Ordenación de los ordinales

Definición. 4.3.1 $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta$.

Lema. 4.3.2

1. $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \subset \beta$.
2. $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$.

Lema. 4.3.3 *Sea* $C \subseteq \mathbf{Ord}$. *Si* $C \neq \emptyset$, *entonces*

1. $\bigcap C \in \mathbf{Ord}$.
2. $\bigcap C$ *es el menor elemento de* C.

Notación. 4.3.4 *Sea* $C \subseteq \mathbf{Ord}$ *tal que* $C \neq \emptyset$. *Escribiremos* $inf(C)$ *en lugar de* $\bigcap C$.

Teorema. 4.3.5 $\langle \mathbf{Ord}, < \rangle$ *es una clase bien ordenada.*

Proposición. 4.3.6 *Si* $x \subseteq \mathbf{Ord}$ *y* x *es transitivo, entonces* $x \in \mathbf{Ord}$.

Teorema. 4.3.7 $\mathbf{Ord}$ *es una clase propia.*

Proposición. 4.3.8 *Si* $x \subseteq \mathbf{Ord}$, *entonces*

1. $\bigcup x \in \mathbf{Ord}$.
2. $\bigcup x$ *es el supremo de* x.

Nota. 4.3.9 *Escribiremos* $sup(x)$ *en lugar de* $\bigcup x$.

Proposición. 4.3.10 $\alpha^+ = inf\{\beta : \alpha < \beta\}$.

4.4 Teoremas de inducción sobre ordinales

Nota. 4.4.1 *En esta sección se muestran varias formas del teorema de inducción para la clase bien ordenada* $\langle \mathbf{Ord}, \in \rangle$.

Teorema. 4.4.2 *Sea* $A \subseteq \mathbf{Ord}$. *Si*

$$(\forall \alpha)[(\forall \beta)[\beta < \alpha \rightarrow \beta \in A] \rightarrow \alpha \in A],$$

entonces $A = \mathbf{Ord}$.

Nota. 4.4.3 *Como consecuencia del teorema anterior, si* φ *es una fórmula tal que*

$$(\forall \alpha)[(\forall \beta)[\beta < \alpha \rightarrow \varphi(\beta)] \rightarrow \varphi(\alpha)],$$

entonces $(\forall \alpha)\varphi(\alpha)$.

Teorema. 4.4.4 *Sea* $A \subseteq \mathbf{Ord}$. *Si*

1. $0 \in A$
2. $(\forall \alpha)[\alpha \in A \rightarrow \alpha + 1 \in A]$
3. $(\forall \alpha)[\alpha \text{ límite } \rightarrow (\alpha \subseteq A \rightarrow \alpha \in A)]$

entonces $A = \mathbf{Ord}$.

Nota. 4.4.5 *Como consecuencia del teorema anterior, si* $\varphi(x)$ *es una fórmula tal que*

1. $\varphi(0)$
2. $(\forall \alpha)[\varphi(\alpha) \rightarrow \varphi(\alpha + 1)]$
3. $(\forall \alpha)[\alpha \text{ límite } \rightarrow ((\forall \beta)[\beta < \alpha \rightarrow \varphi(\beta)] \rightarrow \varphi(\alpha))]$

entonces $(\forall \alpha)\varphi(\alpha)$.

4.5 Clases bien ordenadas y ordinales

Proposición. 4.5.1 *Si* $\alpha \cong \beta$*, entonces* $\alpha = \beta$*.*

Teorema. 4.5.2 *(*MIRIMANOFF *1917) Para cada conjunto bien ordenado* $\langle a, < \rangle$*, existe un único ordinal* α *tal que* $\langle a, < \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle$*.*

Definición. 4.5.3 *El* **tipo ordinal** *de un conjunto bien ordenado* $\langle a, < \rangle$*,* $t.o.(\langle a, < \rangle)$*, es el único ordinal* α *tal que* $\langle a, < \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle$*.*

Proposición. 4.5.4 *Sea* $\langle a, < \rangle$ *un conjunto bien ordenado.*

1. *Si* $a = \emptyset$*, entonces* $t.o.(\langle a, < \rangle) = 0$*.*
2. $t.o.(\langle a, < \rangle) = \{t.o.(\langle a_x, < \rangle) : x \in a\}$*.*

Teorema. 4.5.5 *Si* $\langle A, < \rangle$ *es una clase propia bien ordenada, entonces*

$$\langle A, < \rangle \cong \langle \mathbf{Ord}, \in \rangle$$

Capítulo 5

Ordinales finitos (números naturales)

5.1 Números naturales

Definición. 5.1.1 *Sea α un ordinal. Diremos que α es:*

1. **sucesor** *si existe un β tal que $\alpha = \beta + 1$.*
2. *un* **ordinal finito** *(o un* **número natural***) si*

$$(\forall \beta \leq \alpha)[\beta = 0 \vee (\beta \text{ es sucesor})]$$

3. *es* **límite** *si $\alpha \neq 0$ y α no es sucesor.*

Nota. 5.1.2 *Notaremos $\mathbb{N} = \{\alpha : \alpha \text{ es un número natural}\}$. Los ordinales $0, 1, 2, \ldots \in \mathbb{N}$, y usaremos $m, n, \ldots$ como variables para los números. Con los axiomas estudiados hasta ahora no puede demostrarse que la clase $\mathbb{N}$ sea un conjunto.*

Proposición. 5.1.3 *Sea $\alpha \neq 0$. Son equivalentes:*

1. *α es límite.*
2. *$\bigcup \alpha = \alpha$.*
3. *$(\forall \beta < \alpha)[\beta + 1 < \alpha]$.*

Notas. 5.1.4 *Con los axiomas estudiados hasta ahora no puede demostrarse que existan ordinales límites.*

5.2 El axioma del infinito y propiedades de $\mathbb{N}$

Axioma 5.2.1 **del infinito**

$$(\exists x)[0 \in x \wedge (\forall y \in x)[y^+ \in x]]$$

Nota. 5.2.2 *Diremos que un conjunto x es* **inductivo** *si*

$$0 \in x \wedge (\forall y \in x)[y^+ \in x]$$

Así, el axioma del infinito expresa que $(\exists x)[x$ es inductivo$]$.

Proposición. 5.2.3

1. *$\mathbb{N}$ es transitivo.*
2. *Si a inductivo, entonces $a \subseteq \mathbb{N}$.*
3. *$\mathbb{N}$ es un conjunto.*
4. *$\mathbb{N}$ es inductivo.*
5. *$\mathbb{N} = \bigcap\{a \ : \ a$ inductivo$\}$.*
6. *$\mathbb{N}$ es un ordinal.*
7. *$\mathbb{N}$ es el menor ordinal límite.*

Notación. 5.2.4 *El conjunto $\mathbb{N}$ como ordinal suele representarse por ω.*

5.3 Teoremas de inducción sobre ω

Teorema 5.3.1 **(Postulados de Peano)**.

1. *$0 \in \omega$.*
2. *$(\forall n \in \omega)[n^+ \in \omega]$.*
3. *0 no es el siguiente de ningún natural.*
4. *$(\forall m, n \in \omega)[m^+ = n^+ \rightarrow m = n]$.*
5. **(Principio de inducción sobre ω)**
   Sea $a \subseteq \omega$. Si $0 \in a$ y $(\forall n \in a)n^+ \in a$, entonces $a = \omega$.

Teorema. 5.3.2 *Sea* $a \subseteq \omega$. *Si*

$$(\forall n)[(\forall m)[m < n \rightarrow m \in a] \rightarrow n \in a]$$

entonces $a = \omega$.

Nota. 5.3.3 *Como consecuencia del teorema anterior, si* $\varphi(x)$ *es una fórmula tal que*

$$(\forall n)[(\forall m)[m < n \rightarrow \varphi(m)] \rightarrow \varphi(n)]$$

entonces $(\forall n)\varphi(n)$.

Teorema. 5.3.4 *Sea* $A \subseteq \omega$. *Si*

1. $0 \in a$
2. $(\forall n)[n \in a \rightarrow n + 1 \in a]$

entonces $a = \omega$.

Nota. 5.3.5 *Como consecuencia del teorema anterior, si* $\varphi(x)$ *es una fórmula tal que*

1. $\varphi(0)$
2. $(\forall n)[\varphi(n) \rightarrow \varphi(n + 1)]$

entonces $(\forall n)\varphi(n)$.

Capítulo 6

Teorema de recursión

6.1 El teorema de recursión

Teorema 6.1.1 **de recursión sobre clases bien ordenadas.**
Sea $\langle A, <\rangle$ una clase bien ordenada. Para cada función $G : V \to V$, existe una única función $F : A \to V$ tal que para todo $x \in A$,

$$F(x) = G(F \restriction A_x).$$

Teorema 6.1.2 **(definición por recursión).**
Sea $\langle A, <\rangle$ una clase bien ordenada. Para cada fórmula $\varphi(x)$ existe una única clase $B \subseteq A$ tal que para todo $x \in A$,

$$x \in B \leftrightarrow \varphi(A_x \cap B).$$

Teorema 6.1.3 **de recursión sobre Ord.**
Para cada $G : V \to V$, existe una única función $F : \mathbf{Ord} \to V$ tal que para todo α

$$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$$

Teorema 6.1.4 **de recursión sobre ω.**
Sea a un conjunto y $G : V \to V$. Existe una única $f : \omega \to \omega$ tal que

$$f(0) = a \ \wedge (\forall n \in \omega)[f(n+1) = G(f(n))]$$

Corolario. 6.1.5 $\{0, 1, \ldots, \omega, \omega^+, \omega^{++}, \ldots\}$ *es un conjunto. Además, es un ordinal límite mayor que ω.*

Capítulo 7

Aritmética Ordinal

7.1 Funciones normales

Definición. 7.1.1 *Sea* $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$. *Diremos que* F *es*

1. **Continua** *si para todo ordinal límite* α

$$F(\alpha) = sup\{F(\beta) : \beta < \alpha\}$$

2. **Normal** *si* F *es creciente y continua.*

Ejemplos. 7.1.2

1. *La función identidad es continua y normal.*
2. *Las funciones constantes son continuas no normales.*
3. *La función* $F(\alpha) = \alpha^+$ *no es continua.*

Lema. 7.1.3 *Si* F *es continua, entonces*

$$F \text{ es normal} \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall\alpha)[F(\alpha) < F(\alpha + 1)]$$

Proposición. 7.1.4 *Sea* F *una función normal.*

1. *Si* α *es límite, entonces* $F(\alpha)$ *es límite.*
2. *Si* $F(0) \leq \beta$, *entonces existe un máximo ordinal* α *tal que* $F(\alpha) \leq \beta$.

3. *Si a es un conjunto no vacío de ordinales, entonces*

$$F(sup(a)) = sup\{F(\alpha) : \alpha \in a\}$$

Teorema 7.1.5 **del punto fijo** *(*VEBLEN *1907).*
Sea F una función normal. Para cada α, existe un $\beta \geq \alpha$ tal que $F(\beta) = \beta$.

Proposición. 7.1.6 *Si F y G son funciones normales, entonces $F \circ G$ es normal.*

7.2 Definiciones

Teorema. 7.2.1 *(Suma de ordinales).*

1. *Para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$ existe una única aplicación $\Sigma_\alpha : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ verificando:*
   (a) $\Sigma_\alpha(0) = \alpha$.
   (b) $\forall \beta \in \mathbf{Ord}\ (\Sigma_\alpha(\beta^+) = (\Sigma_\alpha(\beta))^+)$.
   (c) $\forall \beta \in \mathbf{Ord}\ (\beta \text{ limite } \to \Sigma_\alpha(\beta) = sup\ \{\Sigma_\alpha(\gamma) :\ \gamma < \beta\})$.
2. *Existe una única aplicación $\Phi_+ :\ \mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord} \ \to\ \mathbf{Ord}$ verificando:*
   (a) $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (\Phi_+(\langle \alpha, 0 \rangle) = \alpha)$.
   (b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{Ord}\ (\Phi_+(\langle \alpha, \beta^+ \rangle) = (\Phi_+(\langle \alpha, \beta \rangle))^+)$.
   (c) $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{Ord}\ (\beta \text{ limite } \to \Phi_+(\langle \alpha, \beta \rangle) = sup\ \{\Phi_+(\langle \alpha, \gamma \rangle) :\ \gamma < \beta\})$.

Notación. 7.2.2 $\Phi_+(\langle \alpha, \beta \rangle) = \alpha + \beta$.

Teorema. 7.2.3 **(Producto de ordinales)**.

1. *Para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$ existe una única aplicación $\Pi_\alpha : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ verificando:*
   (a) $\Pi_\alpha(0) = 0$.
   (b) $\forall \beta \in \mathbf{Ord}\ (\Pi_\alpha(\beta^+) = \Pi_\alpha(\beta) + \alpha)$.
   (c) $\forall \beta \in \mathbf{Ord}\ (\beta \text{ limite } \to \Pi_\alpha(\beta) = sup\ \{\Pi_\alpha(\gamma) :\ \gamma < \beta\})$.
2. *Existe una única aplicación $\Phi_\bullet :\ \mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord} \ \to\ \mathbf{Ord}$ verificando:*
   (a) $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (\Phi_\bullet(\langle \alpha, 0 \rangle) = 0)$.
   (b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{Ord}\ (\Phi_\bullet(\langle \alpha, \beta^+ \rangle) = \Phi_\bullet(\langle \alpha, \beta \rangle) + \alpha)$.

(c) $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$ (β *limite* $\rightarrow \Phi_{\bullet}(\langle \alpha, \beta \rangle) =$ *sup* $\{\Phi_{\bullet}(\langle \alpha, \gamma \rangle) : \gamma < \beta\}$).

Notación. 7.2.4 $\Phi_{\bullet}(\langle \alpha, \beta \rangle) = \alpha \cdot \beta$.

Teorema. 7.2.5 *(Exponenciación ordinal).*

1. *Definimos la aplicación* $E_0 : \mathbf{Ord} \rightarrow \mathbf{Ord}$ *así:* $E_0(0) = 1$ *y* $E_0(\beta) = 0$, *para cada* $\beta \in \mathbf{Ord} - \{0\}$.

2. *Para cada* $\alpha \in \mathbf{Ord} - \{0\}$ *existe una única aplicación* $E_\alpha : \mathbf{Ord} \rightarrow \mathbf{Ord}$ *verificando:*

   (a) $E_\alpha(0) = 1$.

   (b) $\forall \beta \in \mathbf{Ord}$ $(E_\alpha(\beta^+) = E_\alpha(\beta) \cdot \alpha)$.

   (c) $\forall \beta \in \mathbf{Ord}$ (β *limite* $\rightarrow E_\alpha(\beta) =$ *sup* $\{E_\alpha(\gamma) : \gamma < \beta\}$).

3. *Existe una única aplicación* $\Phi_{\mathbf{exp}} : \mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord} \rightarrow \mathbf{Ord}$ *verificando:*

   (a) $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}$ $(\Phi_{\mathbf{exp}}(\langle \alpha, 0 \rangle) = 1)$.

   (b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$ $(\Phi_{\mathbf{exp}}(\langle \alpha, \beta^+ \rangle) = \Phi_{\mathbf{exp}}(\langle \alpha, \beta \rangle) \cdot \alpha)$.

   (c) $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$ ($\alpha \neq 0 \ \wedge\ \beta$ *limite* $\rightarrow \Phi_{\mathbf{exp}}(\langle \alpha, \beta \rangle) =$ *sup* $\{\Phi_{\mathbf{exp}}(\langle \alpha, \gamma \rangle) : \gamma < \beta\}$).

   (d) $\forall \beta \in \mathbf{Ord}$ $(\beta \neq 0 \rightarrow \Phi_{\mathbf{exp}}(\langle 0, \beta \rangle) = 0)$.

Notación. 7.2.6 $\Phi_{\mathbf{exp}}(\langle \alpha, \beta \rangle) = \alpha^\beta$.

7.3 Propiedades de la suma y el producto.

Proposición. 7.3.1 *(Propiedades de la suma).*

1. *Para cada* $\alpha \in \mathbf{Ord}$ *la aplicación* $\Sigma_\alpha : \mathbf{Ord} \rightarrow \mathbf{Ord}$ *definida por* $\Sigma_\alpha(\beta) = \alpha + \beta$ *es normal.*

2. $\forall \alpha\ (0 + \alpha = \alpha)$.

3. *Si* β *es límite, entonces* $\alpha + \beta$ *es límite.*

4. *Monotonía:*

$$(a)\ \alpha < \beta \rightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta \quad (b)\ \alpha \leq \beta \rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$$

5. *Ley de simplificación para* $<$.

$$(a)\ \gamma + \alpha < \gamma + \beta \rightarrow \alpha < \beta \quad (b)\ \alpha + \gamma < \beta + \gamma \rightarrow \alpha < \beta$$

6. *Ley de simplificación para* $=$.

$$(a) \gamma + \alpha = \gamma + \beta \rightarrow \alpha = \beta \quad (b)\ \alpha + \gamma = \beta + \gamma \not\rightarrow \alpha = \beta$$

7. *Asociatividad:* $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Nota. 7.3.2 *La suma de ordinales no es conmutativo.*

***Teorema 7.3.3* de la resta.** *Sean* α, β *ordinales tales que* $\alpha \leq \beta$. *Entonces, existe un único ordinal* γ *tal que* $\alpha + \gamma = \beta$.

Proposición. 7.3.4 *(Propiedades del producto de ordinales).*

1. *Para cada* $\alpha \in \mathbf{Ord} - \{0\}$ *la aplicación* $\Pi_\alpha : \mathbf{Ord} \rightarrow \mathbf{Ord}$ *definida por* $\Pi_\alpha(\beta) = \alpha \cdot \beta$ *es normal.*
2. $\forall \alpha\ (\alpha \cdot 1 = \alpha\ \wedge\ 1 \cdot \alpha = \alpha\ \wedge\ 0 \cdot \alpha = 0)$.
3. $\forall \alpha, \beta\ (\alpha \neq 0 \wedge \beta$ *límite* $\rightarrow \alpha \cdot \beta$ *límite* $)$.
4. *Monotonía.*
   (a) $\alpha < \beta \wedge \gamma \neq 0 \rightarrow \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$.
   (b) $\alpha \leq \beta \rightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$.
5. $\alpha \neq 0 \wedge 1 < \beta \rightarrow \alpha < \alpha \cdot \beta$.
6. $\alpha \neq 0 \wedge 1 < \beta \not\rightarrow \alpha < \beta \cdot \alpha$.
7. $\alpha \neq 0 \rightarrow \beta \leq \alpha \cdot \beta$.
8. $\alpha \cdot \beta = 0 \leftrightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$.
9. *Ley de simplificación para* $<$.
   (a) $\gamma \neq 0 \wedge \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta \rightarrow \alpha < \beta$.
   (b) $\gamma \neq 0 \wedge \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma \rightarrow \alpha < \beta$.
10. *Ley de simplificación para* $=$.
    (a) $\gamma \neq 0 \wedge \gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta \rightarrow \alpha = \beta$.

(b) $\gamma \neq 0 \wedge \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma \not\rightarrow \alpha = \beta$.

11. *Distributividad del producto respecto de la suma.*

    (a) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$.

    (a) *En general,* $(\alpha + \beta) \cdot \gamma \neq (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$.

12. *Asociatividad:* $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

13. $\forall \alpha (\alpha \text{ límite } \leftrightarrow \exists \beta (\beta \neq 0 \wedge \alpha = \omega \cdot \beta))$.

Nota. 7.3.5 *El producto de ordinales no es conmutativo*

Teorema 7.3.6 **de la división con resto.** *Sean* α, β *ordinales tales que* $\beta \neq 0$. *Entonces, existen unos únicos ordinales* γ, δ *tales que* $\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta \ \wedge \ \gamma \leq \alpha \ \wedge \ \delta < \beta$.

Corolario. 7.3.7 $\forall \alpha (\alpha \text{ límite } \leftrightarrow \exists \beta (\beta \neq 0 \wedge \alpha = \omega \cdot \beta))$

7.4 Propiedades de la exponenciación

Proposición. 7.4.1

1. *Para cada* $\alpha \in \mathbf{Ord} - \{0, 1\}$ *la aplicación* $E_\alpha : \ \mathbf{Ord} \rightarrow \mathbf{Ord}$ *definida por* $E_\alpha(\beta) = \alpha^\beta$ *es normal.*

2. $\forall \alpha \ (1^\alpha = 1 \ \wedge \ \alpha^1 = \alpha \ \wedge \ \alpha \cdot \alpha = \alpha^2)$.

3. $\forall \alpha, \beta \ (\alpha > 1 \wedge \beta \text{ límite } \rightarrow \alpha^\beta \text{ límite })$.

4. *Monotonía:*

$$(a)\ \alpha < \beta \wedge \gamma > 1 \rightarrow \gamma^\alpha < \gamma^\beta \quad (b)\ \alpha \leq \beta \rightarrow \alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$$

5. $\beta > 0 \rightarrow \alpha \leq \alpha^\beta$.

6. *Ley de simplificación para* $<$*:*

$$(a)\ \gamma > 1 \wedge \gamma^\alpha < \gamma^\beta \rightarrow \alpha < \beta \quad (b)\ \gamma \neq 0 \wedge \alpha^\gamma < \beta^\gamma \rightarrow \alpha < \beta$$

7. *Ley de simplificación para* $=$.

$$(a)\ \gamma > 1 \wedge \gamma^\alpha = \gamma^\beta \rightarrow \alpha = \beta \quad (b)\ \gamma > 1 \wedge \alpha^\gamma = \beta^\gamma \not\rightarrow \alpha = \beta$$

8. $\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$.

9. $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.

10. **Propiedades del ordinal** $\varepsilon_0 = \ sup \ \{\omega, \omega^{\omega}, \omega^{\omega^{\omega}}, \ldots\}$.

    (a) *ε_0 es un ordinal límite.*

    (b) $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$.

***Teorema 7.4.2* del logaritmo.** *Sean $\alpha \neq 0, \beta > 1$. Entonces, existen unos únicos ordinales γ, δ, ρ tales que*

$$\alpha = \beta^{\gamma} \cdot \delta + \rho \ \wedge \ 0 < \delta < \beta \ \wedge \ \rho < \beta^{\gamma}$$

Proposición. 7.4.3

1. *Sean $\beta > 1$ y $k \in \omega$. Sean $\gamma_0, \ldots, \gamma_k, \delta_0, \ldots, \delta_k$ ordinales tales que*

$$\gamma_0 > \ldots > \gamma_k \ \wedge \ (\forall i \leq k) \ (\delta_i < \beta)$$

   Entonces, para cada ordinal γ tal que $\gamma_0 < \gamma$ se verifica que

$$\beta^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \ldots + \beta^{\gamma_k} \cdot \delta_k < \beta^{\gamma}$$

2. *Sea $\beta > 1$. Entonces para cada ordinal $\alpha \neq 0$ existen unos únicos $k \in \omega$ y $\gamma_0, \ldots, \gamma_k, \delta_0, \ldots, \delta_k$ ordinales verificando que*

$$\alpha = \beta^{\gamma_0} \cdot \delta_0 + \ldots + \beta^{\gamma_k} \cdot \delta_k \ \wedge \ \gamma_0 > \ldots > \gamma_k \ \wedge \ (\forall i \leq k) \ (0 < \delta_i < \beta)$$

***Teorema 7.4.4* de la forma normal de Cantor.** *Para cada ordinal $\alpha \neq 0$ existen unos únicos $k \in \omega$; $n_0, \ldots, n_k \in \omega - \{0\}$ y ordinales $\gamma_0, \ldots, \gamma_k$ verificando que*

$$\alpha = \omega^{\gamma_0} \cdot n_0 + \ldots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k \ \wedge \ \gamma_0 > \ldots > \gamma_k \ \wedge \ (\forall i \leq k) \ (0 < n_i)$$

Capítulo 8

El axioma de elección y el teorema del buen orden

8.1 El axioma de elección

Nota. 8.1.1 *Los axiomas introducidos hasta ahora son:*

1. **Ax. de extensionalidad:** $(\forall x)(\forall y)[(\forall z)[z \in x \leftrightarrow z \in y] \to x = y]]$
2. **Ax. de separación:** $\{x : x \in y \land \varphi(x)\}$ *es un conjunto.*
3. **Ax. del par:** $\{x : x = y \lor x = z\}$ *es un conjunto.*
4. **Ax. de las partes:** $\{x : x \subseteq y\}$ *es un conjunto.*
5. **Ax. de la unión:** $\bigcup x$ *es un conjunto.*
6. **Ax. de reemplazamiento:** *Si F es una función, entonces $F[x]$ es un conjunto.*
7. **Ax. del infinito:** $(\exists x)[\emptyset \in x \land (\forall y)[y \in x \to y \cup \{y\} \in x]]$.

La teoría cuyos axiomas son los anteriores, se representa por $\mathbf{ZF}^-$ *(y se llama la teoría de Zermelo–Fraenkel sin el axioma de regularidad).*

Definición. 8.1.2 *La función $f : x \to V$ es una* **función de elección** *sobre x si*

$$(\forall y \in x)[y \neq \emptyset \to f(y) \in y]$$

Axioma 8.1.3 **de elección** *(Zermelo 1904). Para cada conjunto x, existe una función de elección sobre x.*

Notas. 8.1.4

1. *El axioma de elección no es demostrable ni refutable a partir de* $\mathbf{ZF}^-$.

2. *La teoría obtenida añadiéndole a* $\mathbf{ZF}^-$ *el axioma de elección se representará por* $\mathbf{ZFC}^-$.

3. *Los resultados que utilicen el axioma de elección se señalarán mediante* **AE**.

8.2 El teorema del buen orden

Teorema 8.2.1 **del buen orden,** ZERMELO 1904) **(AE).**
Todo conjunto puede ser bien ordenado.

Teorema. 8.2.2 *(*$\mathbf{ZF}^-$*) Son equivalentes:*

1. *El axioma de elección.*

2. *Todo conjunto puede ser bien ordenado.*

Capítulo 9

Conjuntos finitos y numerables

9.1 Conjuntos finitos

Definición. 9.1.1 *Se dice que los conjuntos x e y son* **equipotentes** *(y se representa por $x \sim y$) si existe una aplicación biyectiva de x en y.*

Lema. 9.1.2 *La relación de equipotencia es una relación de equivalencia en V.*

Definición. 9.1.3 *Un conjunto x es* **finito** *si es equipotente a algún número natural; e* **infinito***, en caso contrario.*

Nota. 9.1.4 *Si x finito, entonces $x \cup \{y\}$ finito, y por tanto todos los números naturales son conjuntos finitos.*

Proposición. 9.1.5

1. *Si $n \in \omega$ y $a \subset n$, entonces $a \not\sim n$.*
2. *Si $n \neq m$, entonces $n \not\sim m$.*
3. *Si a es un conjunto finito, entonces existe un único número natural n tal que $a \sim n$.*

Definición. 9.1.6 *Sea a un conjunto finito. El único número natural n tal que $a \sim n$ se llama el* **cardinal** *de a y se representa por $|a|$ (y diremos que a tiene n elementos).*

Proposición. 9.1.7

1. *Si a es finito y $b \subset a$, entonces $b \not\sim a$.*

2. *El conjunto ω es infinito.*

Teorema 9.1.8 **de inducción sobre conjuntos finitos.**
Sea $\varphi(x)$ una fórmula. Si se verifica

1. $\varphi(0)$

2. $(\forall x)(\forall y)[\varphi(x) \to \varphi(x \cup \{y\})]$

entonces $(\forall x)[x$ finito $\to \varphi(x)]$.

Teorema 9.1.9 **-ejercicio.** *Sea a un conjunto finito.*

1. $n = m \leftrightarrow n \sim m$

2. *Si b es finito, entonces $|a| = |b| \leftrightarrow a \sim b$*

3. $n \leq m \leftrightarrow (\exists f)[f : n \to m$ *inyectiva*$]$

4. *Si $b \subseteq a$, entonces b es finito y $|b| \leq |a|$*

5. *Si F es una función, entonces $F[a]$ es finito y $|F[a]| \leq |a|$*

6. *Si b es finito, entonces $a \cup b$ es finito y $|a \cup b| \leq |a| + |b|$*

7. *Si los elementos de a son conjuntos finitos, entonces $\bigcup a$ es finito.*

8. $\mathbf{P}(a)$ *es finito y* $|\mathbf{P}(a)| = 2^{|a|}$

9. *Si b es finito, entonces $a \times b$ es finito y $|a \times b| = |a| \times |b|$*

Teorema. 9.1.10 *Sea a un conjunto. Son equivalentes:*

1. *a es finito.*

2. *Existe un orden total R en a tal que todo subconjunto no vacio de a tiene un menor y un mayor elemento respecto de R.*

3. *Todo subconjunto no vacio de $\mathbf{P}(a)$ tiene un elemento $\subseteq$–maximal.*

9.2 Conjuntos numerables

Definición. 9.2.1 *Un conjunto a es* **numerable** *si $a \sim \omega$.*

Teorema 9.2.2 **-ejercicio.** *Sea a un conjunto numerable.*

1. *Si $b \subseteq a$ es infinito, entonces b es numerable.*
2. *Si F es una función, entonces $F[a]$ es finito o numerable.*
3. *Si b es numerable, entonces $a \cup b$ es numerable.*
4. *Si b es finito y todo $x \in b$ es numerable, entonces $\bigcup b$ es finito o numerable.*
5. *Si b es numerable, entonces $a \times b$ es numerable.*
6. *Si $n \in \omega - \{0\}$, entonces a^n es numerable.*
7. *El conjunto de las sucesiones finitas de elementos de a es numerable.*
8. *El conjunto de los subconjuntos finitos de a es numerable.*
9. *Si R es una relación de equivalencia en a, entonces el conjunto cociente a/R y las clases de equivalencia $[x]_R$ son conjuntos finitos o numerables.*
10. *$\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables.*

Teorema 9.2.3 **de Cantor.** *El conjunto $\mathbf{P}(\omega)$ no es numerable.*

9.3 Conjuntos Dedekind–infinitos

Definición. 9.3.1 *Un conjunto a es* **Dedekind–infinito** *(o* **D–infinito***) si existe un $b \subseteq a$ numerable; en caso contrario, es* **Dedekind–finito** *(o* **D–finito***).*

Proposición. 9.3.2 *Si a es D–infinito, entonces a es infinito.*

Proposición. 9.3.3 *(***AE***) Si a es infinito, entonces a es D–infinito.*

Nota. 9.3.4 *Sin el axioma de eleccion, no se puede probar la propiedad anterior.*

Teorema. 9.3.5

$$a \text{ D–infinito} \iff (\exists b \subset a)[b \sim a]$$

Proposición. 9.3.6 *Sea* $a \subseteq \omega$.

1. *Si* a *es acotado, entonces* a *es finito.*
2. *Si* a *es no acotado, entonces* a *es numerable.*

Corolario. 9.3.7 *Sea* $a \subseteq \omega$.

$$a \text{ infinito} \iff a \text{ } D\text{–infinito}$$

Lema. 9.3.8 *Sea* a *un conjunto infinito. Para cada* $n \in \omega$, *existe un* $b \subset a$ *tal que* $|b| = n$.

Teorema. 9.3.9 *(*TARSKI*) Son equivalentes:*

1. a *infinito*
2. $\mathbf{P}(\mathbf{P}(a))$ *es D–infinito.*

Capítulo 10

El axioma de regularidad

10.1 El axioma de regularidad y la clase WF

Axioma 10.1.1 **de regularidad:**

$$(\forall x)[x \neq \emptyset \rightarrow (\exists y \in x)[x \cap y = \emptyset]]$$

Definición. 10.1.2 $(\mathbf{ZF}^-)$ *La función $V : \mathbf{Ord} \rightarrow V$ está definida por:*

- $V(0) = 0$
- $V(\alpha + 1) = \mathbf{P}(V(\beta))$
- $V(\alpha) = \bigcup\{V(\beta) : \beta < \alpha\}$, *si α es límite.*

y la clase $WF = \bigcup\{V(\alpha) \ : \ \alpha \in \mathbf{Ord}\}$.

Lema. 10.1.3

1. *Sea A una clase. $\forall x \in A$ (x es transitivo) $\implies$ $\cup A$ transitiva.*
2. *$x \in WF \wedge \alpha = inf\{\beta : \ x \in V(\beta)\}$ $\implies$ α sucesor.*

Definición. 10.1.4 $(\mathbf{ZF}^-)$ *Sea $x \in WF$, definimos $rank(x) = inf\{\beta : \ x \in V(\beta + 1)\}$.*

Proposición. 10.1.5 $(\mathbf{ZF}^-)$

1. *$\forall \alpha \in \mathbf{Ord}[V(\alpha)$ es transitivo$]$.*

2. $\beta \leq \alpha \implies V(\beta) \subseteq V(\alpha)$.

3. WF *es transitiva.*

4. $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}[V(\alpha) = \{x \in WF : \ rank(x) < \alpha\}]$.

5. $y \in WF$. *Entonces*

   (a) $x \in y \implies rank(x) < rank(y)$

   (b) $rank(y) = sup(\{rank(x) + 1 : \ x \in y\})$

6. $x \in WF \land x$ *transitivo* $\implies \forall \beta < rank(x) \ \exists y \in x \ (rank(y) = \beta)$.

7. $\forall x \ (x \in WF \leftrightarrow x \subseteq WF)$.

Proposición. 10.1.6 ($\mathbf{ZF}^-$)

1. *Sea* $\alpha \in \mathbf{Ord}$. *Entonces*

$$\alpha \in WF \land rank(\alpha) = \alpha \land V(\alpha) \cap \mathbf{Ord} = \alpha$$

2. *Sea* $x \in WF$ *con* $rank(x) = \alpha$

   (a) $\cup x, \ \mathbf{P}(x), \ \{x\} \in WF$.

   (b) $rank(\cup x) \leq \alpha$.

   (c) $rank(\mathbf{P}(x)) = \alpha + 1 = rank(\{x\})$.

3. *Sean* $x, \ y \in WF$ *con* $\alpha = max(rank(x), rank(y))$. *Entonces*

   (a) $\{x, y\}, \ x \cup y, \ x \cap y, \ \langle x, y \rangle, \ x \times y, \ x^y \in WF$

   (b) $rank(\{x, y\}) = \alpha + 1, \ rank(x \cup y) = \alpha, \ rank(x \cap y) \leq \alpha$

   (c) $rank(\langle x, y \rangle) = \alpha + 2, \ rank(x \times y) \leq \alpha + 2, \ rank(x^y) \leq \alpha + 3$

10.2 Relaciones bien fundamentadas

Definición. 10.2.1 *Sean A una clase y R una relación sobre A. Diremos que R está* **bien fundamentada** *sobre A si:*

$$\forall x \subseteq A \ (x \neq 0 \rightarrow \exists y \in x \ (\forall z \in x \ \neg(zRy)))$$

Un tal elemento se dice R–minimal en x.

Proposición. 10.2.2 ($\mathbf{ZF}^-$)

1. *$x \in WF \quad \Longrightarrow \quad \in$ está bien fundamentada sobre x.*

2. *x transitivo y $\in$ bien fundamentada sobre $x \quad \Longrightarrow \quad x \in WF$.*

Definición. 10.2.3 ($\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P}$)

1. $\cup^0(x) = x$
   $\cup^{n+1}(x) = \bigcup \cup^n(x)$

2. *La clausura transitiva de x es el conjunto $TC(x) = \bigcup\{\cup^n(x) : \ n \in \omega\}$.*

Proposición. 10.2.4 ($\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P}$)

(1) $x \subseteq TC(x)$	(2) $TC(x)$ *es transitivo*
(3) $x \subseteq y \wedge y$ *transitivo* $\rightarrow TC(x) \subseteq y$	(4) x *transitivo* $\rightarrow TC(x) = x$
(5) $y \in x \quad \Longrightarrow \quad TC(y) \subseteq TC(x)$	(6) $TC(x) = x \cup \bigcup\{TC(y) \ : \ y \in x\}$

Teorema. 10.2.5 ($\mathbf{ZF}^-$) *Son equivalentes:*

1. *$x \in WF$.*

2. *$TC(x) \in WF$.*

3. *$\in$ está bien fundamentada sobre $TC(x)$.*

Teorema. 10.2.6 ($\mathbf{ZF}^-$) *Son equivalentes:*

1. *Axioma de regularidad.*

2. *$\forall x$ ($\in$ está bien fundamentada sobre x).*

3. *$\mathbf{V} = WF$.*

Teorema. 10.2.7 *Sea $\varphi(u, v)$ una fórmula. Entonces*

$$\forall x \exists y \forall u (u \in x \wedge \exists v \varphi(u, v) \rightarrow \exists v \in y \varphi(u, v))$$

10.3 Inducción y recursión sobre relaciones bien fundamentadas (*)

Definición. 10.3.1 ($\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P}$). *Sean A una clase y R una relación sobre A.*

1. *Diremos que R es adecuada sobre A si:*

$$\forall x \in A\ (\{y \in A :\ yRx\} \textit{ es un conjunto})$$

2. *Si R es adecuada sobre A, definimos*

   (a) $Ext_R(x) = \{y \in A :\ yRx\}$.

   (b) ${Ext_R}^0(x) = Ext(x)$ *y* ${Ext_R}^{n+1}(x) = \bigcup\{Ext_R(y) :\ y \in {Ext_R}^n(x)\}$

3. $C_R(x) = \bigcup\{{Ext_R}^n(x) :\ n \in \omega\}$.

Proposición. 10.3.2 ($\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P}$). *Si R es adecuada sobre A y $x \in A$, entonces*

1. $\forall y \in C_R(x)\ (Ext_R(y) \subseteq C_R(x))$.

2. $C_R(x) = Ext_R(x) \cup \bigcup\{C_R(y) :\ Ext_R(x)\}$.

Teorema 10.3.3 **de inducción sobre una relación bien fundamentada y adecuada** ($\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P}$). *Sea R una relación bien fundamentada y adecuada sobre A, y $B \subseteq A$. Entonces*

1. $B \neq 0 \rightarrow B$ *tiene un elemento R-minimal.*

2. $\forall x \in A\ (Ext_R(x) \subseteq B \rightarrow x \in B) \quad \Longrightarrow \quad A = B$.

Nota. 10.3.4 *En el teorema anterior la condición de ser R adecuada sobre A puede omitirse.*

Proposición. 10.3.5 *(**ZF**)*

1. **Teorema de $\in$-inducción**

   (a) $B \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists x \in B\ (x \cap B = 0)$.

   (b) *Sean A transitiva y $B \subseteq A$.*

$$\forall x \in A\ (x \subseteq B \rightarrow x \in B) \quad \Longrightarrow \quad A = B$$

2. *Sean A y B clases transitivas y $F : A \to B$ una función biyectiva tal que*

$$\forall x,\ y \in A\ (x \in y \leftrightarrow F(x) = F(y))$$

Entonces $A = B$ y F es la identidad.

***Teorema 10.3.6* de recursión sobre una relación bien fundamentada y adecuada ($\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P}$).** *Sean R una relación bien fundamentada y adecuada sobre A y $G : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una función. Entonces existe una única $F : A \to \mathbf{V}$ tal que:*

$$\forall x \in A\ (F(x) = G(x, F_{\restriction Ext_R(x)})$$

Corolario. 10.3.7 *($\mathbf{ZF}$) Sean A una clase transitiva y $G : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. Entonces existe una única $F : A \to \mathbf{V}$ tal que: $\forall x \in A\ (F(x) = G(x, F_{\restriction x}))$.*

Definición. 10.3.8 ($\mathbf{ZF}^-$) *Sean R una relación bien fundamentada y adecuada sobre A y $x \in A$. Definimos $rank_R(x) = sup(\{rank_R(y) + 1 : yRx\})$.*

Lema. 10.3.9 ($\mathbf{ZF}^-$) *Si A es transitiva y $\in$ está bien fundamentada sobre A, entonces*

$$A \subseteq WF\ \wedge\ \forall x \in A\ (rank_{\in}(x) = rank(x))$$

Definición. 10.3.10 *Sea E una relación sobre A. Diremos que E es extensional sobre A si:*

$$\forall x,\ y \in A\ (\forall z \in A\ (zEx \leftrightarrow zEy) \to x = y)$$

***Teorema 10.3.11* del colapso** *(*MOSTOWSKI*).* **($\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P}$)**
Sea E una relación bien fundamentada, adecuada y extensional sobre A. Entonces existen M y $F : A \to M$ tales que:

1. *M es transitiva.*

2. *$F : \langle A, E \rangle\ \cong\ \langle M, \in \rangle$.*

3. *F y M son únicas satisfaciendo (1) y (2).*

4. *$B \subseteq A$ transitiva $\wedge\ E \restriction B = \in \implies \forall x \in B\ (F(x) = x)$.*

Corolario. 10.3.12 ($\mathbf{ZF}^-$)
Si $A \subseteq WF$ es una clase extensional, entonces existe una clase transitiva M tal que $A\ \cong\ M$.

Capítulo 11

Cardinales

11.1 Números cardinales

Lema. 11.1.1

1. *Si* $x \sim y$*, entonces* x *es bien ordenable syss* y *es bien ordenable.*

2. *Un conjunto* x *es bien ordenable syss existe un* α *tal que* $x \sim \alpha$*.*

Definición. 11.1.2

1. *El* **cardinal de** x *es*

$$|x| = \begin{cases} \mathit{inf}\{\alpha : \alpha \sim x\}, & \text{si } x \text{ es bien ordenable} \\ \{y : y \sim x \wedge (\forall z)[z \sim x \to \mathit{rank}(y) \leq \mathit{rank}(z)]\}, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. a *es un* **cardinal** *si existe un* x *tal que* $|x| = a$*.*

Ejemplos. 11.1.3

1. $(\forall n \in \omega)[|n| = n]$

2. $|\omega| = |\omega + 1| = \omega$

3. $0, 1, \ldots, \omega$ *son cardinales.*

4. $\omega + 1$ *no es un cardinal (en general* $|\alpha| \neq \alpha$*).*

Lema. 11.1.4 $|x|$ *es un conjunto.*

Definición. 11.1.5 **Cn** $= \{a : a$ *es un cardinal*$\}$.

Notación. 11.1.6 *Los cardinales se representarán por* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$.

Lema. 11.1.7 *Si* $0 \in |x|$, *entonces* x *es bien ordenable.*

Lema. 11.1.8 $|x| \in \mathbf{Ord} \iff x$ *es bien ordenable.*

Corolario. 11.1.9 $\mathbf{Cn} \cap \mathbf{Ord} = \{|x| : x$ *es bien ordenable*$\}$

Definición. 11.1.10 *Los elementos de* $\mathbf{In} = \mathbf{Cn} \cap \mathbf{Ord}$ *se llaman* **cardinales bien ordenables** *(u* **ordinales iniciales***)*

Notación. 11.1.11 *Los cardinales bien ordenables se representarán por* $\kappa, \lambda, \mu, \ldots$

Lema. 11.1.12 $|x| = |y| \leftrightarrow x \sim y$.

11.2 El teorema de Schrder-Bernstein-Cantor

Definición. 11.2.1

1. *Se dice que el conjunto* x *es* **sumergible** *en* y, *y se representa por* $x \preceq y$, *si existe una aplicación* $f : x \to y$ *inyectiva.*
2. $x \prec y \leftrightarrow x \preceq y \wedge x \not\sim y$.

Lema. 11.2.2

1. $x \preceq x$
2. $x \preceq y \wedge y \preceq z \to x \preceq z$
3. $x \sim y \to x \preceq y$
4. $x \subseteq y \to x \preceq y$
5. $x \preceq y \to (\exists z \subseteq y)[x \sim y]$

Teorema 11.2.3 **de Schröder–Bernstein–Cantor**.

$$x \preceq y \wedge y \preceq x \to x \sim y$$

Corolario. 11.2.4 *Si $x \subseteq y \subseteq z$ y $x \sim z$, entonces $x \sim y$.*

Lema. 11.2.5 *Sean x, x', y, y' conjuntos tales que $|x| = |x'|$ y $|y| = |y'|$. Entonces $x \preceq y$ syss $x' \preceq y'$.*

Definición. 11.2.6

1. $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b} \leftrightarrow (\exists x)(\exists y)[|x| = \mathfrak{a} \wedge |y| = \mathfrak{b} \wedge x \preceq y]$.

2. $\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \leftrightarrow \mathfrak{a} \leq \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$.

Lema. 11.2.7

1. $x \subseteq y \rightarrow |x| \leq |y|$,

2. $\mathfrak{a} \leq |y| \leftrightarrow (\exists x \subseteq y)[|x| = \mathfrak{a}]$.

3. $|x| \leq |y| \leftrightarrow x \preceq y$

Corolario. 11.2.8 *La relación $<$ es un orden parcial sobre* $\mathbf{Cn}$.

Teorema 11.2.9 **de Cantor** *(1892).*
Para todo conjunto x, $|x| < |\mathbf{P}(x)|$.

Corolario. 11.2.10 $(\forall \mathfrak{a})(\exists \mathfrak{b})[\mathfrak{a} < \mathfrak{b}]$.

Lema. 11.2.11

1. *Si rank$(x) = \alpha$, entonces $x \subseteq V(\alpha)$.*

2. *Para todo α, $V(\alpha)$ es transitivo.*

3. *Si $\alpha < \beta$, entonces $V(\alpha) \subseteq V(\beta)$.*

4. *Si rank$(x) \leq \beta$, entonces $x \subseteq V(\beta)$.*

Teorema. 11.2.12 *Si $x \subseteq$* $\mathbf{Cn}$, *entonces existe un cardinal $\mathfrak{a}$ tal que $(\forall \mathfrak{b} \in x)[\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}]$.*

Corolario. 11.2.13

1. *Si $x \subseteq$* $\mathbf{Cn}$, *entonces existe un cardinal $\mathfrak{a}$ tal que $(\forall \mathfrak{b} \in x)[\mathfrak{b} < \mathfrak{a}]$.*

2. $\mathbf{Cn}$ *es una clase propia.*

11.3 Ordenación de los cardinales bien ordenables

Lema. 11.3.1 $\mathfrak{a} \in \mathbf{In} \wedge \mathfrak{b} < \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b} \in \mathbf{In}$.

Lema. 11.3.2 *Si* $\alpha \in \mathbf{Ord}$, *entonces*

$$|\alpha| \in \mathbf{In} \wedge |\alpha| \leq \alpha$$

Lema. 11.3.3 *Sea* $\alpha \in \mathbf{Ord}$. *Son equivalentes:*

1. $\alpha \in \mathbf{Cn}$.
2. $(\forall \beta)[\beta < \alpha \rightarrow \beta \not\sim \alpha]$.
3. $|\alpha| = \alpha$.

Proposición. 11.3.4 *Sean* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbf{In}$.

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \text{ como ordinales} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b} \text{ como cardinales}$$

Corolario. 11.3.5

1. *En* $\mathbf{ZF}$, $\langle \mathbf{In}, < \rangle$ *es una C.B.O.*
2. *En* $\mathbf{ZFC}$, $\langle \mathbf{Cn}, < \rangle$ *es una C.B.O.*

Nota. 11.3.6 *En* $\mathbf{ZF}$ *no puede demostrarse que* $\langle \mathbf{Cn}, < \rangle$ *sea una C.B.O.*

Corolario. 11.3.7

1. $\alpha \leq \beta \rightarrow |\alpha| \leq |\beta|$.
2. $|\alpha| < |\beta| \rightarrow \alpha < \beta$.
3. $|\alpha| = max\{\beta \in \mathbf{In} : \beta \leq \alpha\}$.

Proposición. 11.3.8 *Sea* $\alpha \in \mathbf{In}$ *y* $a \subseteq \alpha$. *Entonces*

1. $t.o.(\langle a, \in \rangle) = \alpha \rightarrow |a| = \alpha$.
2. $t.o.(\langle a, \in \rangle) \neq \alpha \rightarrow |a| < \alpha$.

Teorema. 11.3.9 *(*Hartogs*, 1915)*

$$(\forall x)(\exists \alpha)[\alpha \preceq \mathbf{P}(\mathbf{P}(x \times x)) \wedge \alpha \not\preceq x]$$

Definición. 11.3.10

1. *El* **número de Hartogs** *de x es*

$$h(x) = \mathit{inf}\{\alpha : \alpha \not\preceq x\}$$

2. *El* **cardinal sucesor** *de $|x|$ es*

$$x^+ = \mathit{inf}\{\kappa \in \mathbf{In} : \kappa \not\leq |x|\}$$

Lema. 11.3.11

1. $(\forall x)[h(x) = x^+]$
2. $x^+ \leq |\mathbf{P}(\mathbf{P}(x \times x))|$.

Proposición. 11.3.12 $(\forall \mathfrak{a} \in \mathbf{In})[\mathfrak{a} < \mathfrak{a}^+]$

Corolario. 11.3.13 $(\forall \mathfrak{a} \in \mathbf{In})[\mathfrak{a}^+ = \mathit{inf}\{\mathfrak{b} \in \mathbf{In} : \mathfrak{a} < \mathfrak{b}\}]$.

Proposición. 11.3.14

1. *No existe ningún cardinal mayor que todo cardinal bien ordenable.*
2. *Si x es un conjunto de cardinales bien ordenables, entonces $\bigcup x$ es un cardinal bien ordenable.*

Corolario. 11.3.15

1. $x \subseteq \mathbf{In} \to (\exists \mathfrak{b} \in \mathbf{In})(\forall \mathfrak{a} \in x)[\mathfrak{a} < \mathfrak{b}]$.
2. $\mathbf{In} - \omega$ *es una clase propia.*

Nota. 11.3.16 $\langle \mathbf{In} - \omega, < \rangle$ *es una clase propia bien ordenada. Por tanto, existe un único isomorfismo*

$$\aleph : \mathbf{Ord} \to \mathbf{In} - \omega.$$

Escribiremos $\aleph_\alpha$ en lugar de $F(\alpha)$.

Proposición. 11.3.17

1. $\aleph_0 = \omega$
2. $(\forall\alpha)[\aleph_\alpha$ *es un ordinal límite*$]$.

Proposición. 11.3.18

1. $\alpha < \beta \leftrightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta$.
2. $\aleph_\alpha < \mathfrak{a} < \aleph_\beta \to (\exists\gamma)[\alpha < \gamma < \beta \wedge \mathfrak{a} = \aleph_\gamma]$.
3. $\aleph_\alpha^+ = \aleph_{\alpha+1}$.
4. *La función $\aleph$ es normal.*

Corolario. 11.3.19 $(\forall\alpha)(\exists\beta \geq \alpha)[\beta = \aleph_\beta]$.

Notas. 11.3.20 *Sea $\mathfrak{a}$ un cardinal.*

1. *Diremos que $\mathfrak{a}$ es* **finito** *si $\mathfrak{a} \in \omega$. En otro caso diremos que es infinito.*
2. *Diremos que $\mathfrak{a}$ es* **bien ordenable** *si $\mathfrak{a} \in \mathbf{In} - \omega$. En otro caso diremos que es* **no bien ordenable**.
3. *Si $\mathfrak{a} = \aleph_\alpha$, diremos que es un* **cardinal sucesor** *si α es un ordinal sucesor. En otro caso diremos que es límite.*

Capítulo 12

Aritmética Cardinal

12.1 Suma, producto y exponenciación cardinal

Lema. 12.1.1 *Si* $x \sim x'$, $y \sim y'$, $x \cap y = \emptyset$ *y* $x' \cap y' = \emptyset$, *entonces* $x \cup y \sim x' \cup y'$.

Definición. 12.1.2 *(*CANTOR *1887) La* **suma** *de los cardinales* $\mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{b}$ *se define por*

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \leftrightarrow (\exists x)(\exists y)[|x| = \mathfrak{a} \wedge |y| = \mathfrak{b} \wedge x \cap y = \emptyset \wedge |x \cup y| = \mathfrak{c}]$$

Nota. 12.1.3 *La suma de cardinales está bien definida.*

Proposición. 12.1.4

1. *La suma de cardinales es asociativa y conmutativa.*
2. $\mathfrak{a} + 0 = 0 + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.
3. $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a} \leftrightarrow (\exists \mathfrak{c})[\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}]$.
4. $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}' \wedge \mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}' \to \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'$.

Proposición. 12.1.5 $|x \cup y| \leq |x| + |y|$.

Proposición. 12.1.6 *Para núneros naturales, su suma como ordinales coincide con su suma como cardinales.*

Proposición. 12.1.7

1. $(\forall n \in \omega)[\aleph_0 + n = \aleph_0]$.

2. $\mathfrak{a} \geq \aleph_0 \to \mathfrak{a} + n = \mathfrak{a}$.

3. $\aleph_\alpha + n = \aleph_\alpha$.

4. $\mathfrak{a} + 1 = \mathfrak{a} \leftrightarrow \aleph_0 \leq \mathfrak{a}$.

***Lema.* 12.1.8** *Si $x \sim x'$ e $y \sim y'$, entonces $x \times y \sim x' \times y'$.*

***Definición.* 12.1.9** *(*CANTOR *1887) El* **producto** *de los cardinales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ se define por*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c} \leftrightarrow (\exists x)(\exists y)[|x| = \mathfrak{a} \wedge |y| = \mathfrak{b} \wedge |x \times y| = \mathfrak{c}]$$

***Nota.* 12.1.10** *El producto de cardinales está bien definido.*

***Proposición.* 12.1.11**

1. *El producto de cardinales es asociativo y conmutativo.*

2. $\mathfrak{a}0 = 0\mathfrak{a} = 0$.

3. $\mathfrak{a}1 = \mathfrak{a}$.

4. *Distributiva:* $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$.

5. $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}' \wedge \mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}' \to \mathfrak{a}\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$.

***Proposición.* 12.1.12** *Para los números naturales, su producto como ordinales coincide con su producto como cardinales.*

***Lema.* 12.1.13** *Si $x \sim x'$ y $y \sim y'$, entonces $x^y \sim {x'}^{y'}$.*

***Definición.* 12.1.14** *(*CANTOR *1895) La* **exponenciación** *de los cardinales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ se define por*

$$\mathfrak{a}^\mathfrak{b} = \mathfrak{c} \leftrightarrow (\exists x)(\exists y)[|x| = \mathfrak{a} \wedge |y| = \mathfrak{b} \wedge |x^y| = \mathfrak{c}]$$

***Notas.* 12.1.15** *La exponenciación de cardinales está bien definida.*

***Proposición.* 12.1.16**

1. $(\mathfrak{a}^\mathfrak{b})^\mathfrak{c} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$.

2. $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^\mathfrak{c} = \mathfrak{a}^\mathfrak{c}\mathfrak{b}^\mathfrak{c}$.

3. $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}$.

4. $0^0 = 1$. *Si* $\mathfrak{a} \neq 0$ *entonces* $0^{\mathfrak{a}} = 0$.

5. $\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a} \wedge 1^{\mathfrak{a}} = 1$

6. $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}\mathfrak{a}$.

7. $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{c} \wedge \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \rightarrow \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \leq \mathfrak{c}^{\mathfrak{d}}$.

Proposición. 12.1.17 *Para números naturales, su exponenciación como ordinales coincide con su exponenciación como cardinales.*

Proposición. 12.1.18

1. $|\mathbf{P}(x)| = 2^{|x|}$.

2. $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$.

3. $\mathfrak{a}^+ \leq 2^{(2^{\mathfrak{a}^2})}$.

12.2 Aritmética cardinal en In

Definición. 12.2.1 *La relación R definida sobre la clase* $\mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord}$ *por:*

$$\langle \alpha, \beta \rangle R \langle \alpha', \beta' \rangle \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} max(\alpha, \beta) < max(\alpha', \beta') \text{ ó} \\ max(\alpha, \beta) = max(\alpha', \beta') \wedge \alpha < \alpha' \text{ ó} \\ max(\alpha, \beta) = max(\alpha', \beta') \wedge \alpha = \alpha' \wedge \beta < \beta' \end{array} \right.$$

se llama el **orden canónico** *de* $\mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord}$.

Lema. 12.2.2 *Para todo α, la sección inicial determinada por $\langle 0, \aleph_\alpha \rangle$ en $\langle \mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord}, R \rangle$ es $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$.*

Proposición. 12.2.3 *R es un buen orden en* $\mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord}$.

Corolario. 12.2.4 *Existe un único isomorfismo F de $\langle \mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord}, R \rangle$ en $\langle \mathbf{Ord}, \in \rangle$.*

Proposición. 12.2.5 $F[\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha] = \aleph_\alpha \aleph_\alpha$.

Corolario. 12.2.6

1. $\aleph_\alpha \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

2. $\aleph_\alpha \aleph_\beta = max(\aleph_\alpha, \aleph_\beta)$.

3. $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = max(\aleph_\alpha, \aleph_\beta)$.

Corolario. 12.2.7

1. *Si* $n \neq 0$, *entonces* $n\aleph_\alpha = \aleph_\alpha$

2. $\aleph_\alpha \leq \mathfrak{a}\mathfrak{b} \to \aleph_\alpha \leq \mathfrak{a} \vee \aleph_\alpha \leq \mathfrak{b}$.

Proposición. 12.2.8

1. $\beta \leq \alpha \to {\aleph_\beta}^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$.

2. $2 \leq n \to n^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$.

3. $n > 0 \to {\aleph_\alpha}^n = \aleph_\alpha$.

12.3 Aritmética cardinal Infinita

Nota. 12.3.1 *A lo largo de esta sección* $\langle \kappa_i : i \in I \rangle$ *representará una familia de cardinales bien ordenables.*

Definición. 12.3.2 *(suma general de cardinales,* WHITEHEAD *1902). La* **suma** *de la familia* $\langle \kappa_i : i \in I \rangle$ *es*

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = \left| \bigcup_{i \in I} \{i\} \times \kappa_i \right|$$

Proposición. 12.3.3 *Sea* $\langle x_i : i \in I \rangle$ *tal que:*

1. $(\forall i \in I)[x_i$ *es bien ordenable*$]$.

2. $(\forall i, j \in I)[i \neq j \to x_i \cap x_j = \emptyset]$.

3. $(\exists f)(\forall i \in I)[f(i) : x_i \to |x_i|$ *es biyectiva*$]$.

Entonces

$$\left| \bigcup_{i \in I} x_i \right| = \sum_{i \in I} |x_i|$$

Corolario. 12.3.4 *(**AE**) Si $\langle x_i : i \in I\rangle$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos, entonces*

$$\left|\bigcup_{i\in I} x_i\right| = \sum_{i\in I} |x_i|$$

Proposición. 12.3.5 *Si I es un conjunto bien ordenable, entonces*

1. $\sum_{i\in I} \kappa_i \in \mathbf{In}$.
2. *Si $\kappa_i > 0$ para todo $i \in I$ y $|I|$ o alguno de los κ_i es infinito, entonces*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = max(|I|, sup\{\kappa_i : i \in I\})$$

Proposición. 12.3.6

1. $\sum_{i\in 0} \kappa_i = 0,\ \sum_{i\in 1} \kappa_i = \kappa_0,\ \sum_{i\in 2} \kappa_i = \kappa_0 + \kappa_1$.
2. *Conmutativa: Si $g : I \to I'$ es biyectiva y $(\forall i \in I)[\kappa'_{g(i)} = \kappa_i]$, entonces*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \sum_{i\in I'} \kappa'_i.$$

3. $(\forall i \in I)[\kappa_i \leq \kappa'_i] \to \sum_{i\in I} \kappa_i \leq \sum_{i\in I} \kappa'_i$.
4. $(\forall j \in I)[\kappa_j \leq \sum_{i\in I} \kappa_i]$.
5. *Si I es bien ordenable y $(\forall i \in I)[\kappa_i = \kappa]$, entonces $\sum_{i\in I} \kappa_i = |I|\kappa$.*

Definición. 12.3.7 *(producto general de cardinales,* WHITEHEAD*, 1902). El* **producto** *de la familia $\langle \kappa_i : i \in I\rangle$ es*

$$\prod_{i\in I} \kappa_i = \left|\prod_{i\in I} \kappa_i\right|$$

Proposición. 12.3.8 *Sea $\langle x_i :\ i \in I\rangle$ tal que:*

1. $(\forall i \in I)[x_i$ *es bien ordenable*$]$.
2. $(\exists f)(\forall i \in I)[f(i) : x_i \to |x_i|$ *es biyectiva*$]$.

Entonces

$$\left|\prod_{i\in I} x_i\right| = \prod_{i\in I} |x_i|$$

Corolario. 12.3.9 *(**AE**)*

$$\left|\prod_{i\in I} x_i\right| = \prod_{i\in I} |x_i|$$

Proposición. 12.3.10

1. $\prod_{i\in 0} \kappa_i = 1,\ \prod_{i\in 1} \kappa_i = \kappa_0,\ \prod_{i\in 2} \kappa_i = \kappa_0\kappa_1.$
2. *Conmutativa: Si* $g : I \to I'$ *es biyectiva y* $(\forall i \in I)[\kappa'_{g(i)} = \kappa_i]$*, entonces*
$$\prod_{i\in I} \kappa_i = \prod_{i\in I'} \kappa'_i.$$
3. $(\forall i \in I)[\kappa_i \leq \kappa'_i] \to \prod_{i\in I} \kappa_i \leq \prod_{i\in I} \kappa'_i.$
4. *Si* I *es bien ordenable y* $(\forall i \in I)[\kappa_i = \kappa]$*, entonces* $\prod_{i\in I} \kappa_i = \kappa^{|I|}$.

Proposición. 12.3.11

1. $\prod_{i\in I} \kappa_i = 0 \leftrightarrow (\exists i \in I)[\kappa_i = 0).$
2. *Si* $(\forall i \in I)[\kappa_i \geq 2]$*, entonces* $\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \prod_{i\in I} \kappa_i$.

Teorema 12.3.12 *(desigualdad de* KÖNIG–ZERMELO*).*
Si $\langle \kappa_i :\ i \in I\rangle$ *y* $\langle \kappa'_i :\ i \in I\rangle$ *son dos familias de cardinales bien ordenables tales que* $(\forall i \in I)[\kappa_i < \kappa'_i]$*, entonces*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \kappa'_i$$

Corolario. 12.3.13 $\kappa < 2^\kappa$.

12.4 Cardinales de algunos conjuntos

Definición. 12.4.1 *Sea A una clase y $\alpha \in$ **Ord**. La clase de las sucesiones de elementos de A de longitud menor que α es*

$$A^{\underset{\smile}{\alpha}} = \{f : (\exists \beta < \alpha)[f : \beta \to A]\}$$

Notas. 12.4.2

1. $A^{\underset{\smile}{\alpha}} = \bigcup_{\beta<\alpha} A^{\underset{\smile}{\beta}}$
2. *Si A es un conjunto, entonces $A^{\underset{\smile}{\alpha}}$ es un conjunto.*

Proposición. 12.4.3 $\left|\aleph_\alpha^{\underset{\smile}{\omega}}\right| = \aleph_\alpha$.

Definición. 12.4.4 *Sea A una clase y $\mathfrak{b}$ un cardinal. La clase de los subconjuntos de A de cardinal menor o igual que $\mathfrak{b}$ es*

$$\mathbf{P}_{<\mathfrak{b}}(A) = \{x : x \subseteq A \wedge |x| < \mathfrak{b}\}$$

Notas. 12.4.5 $\mathbf{P}_{<\omega}(A)$ *es la clase de los subconjuntos finitos de A.*

Proposición. 12.4.6 $|\mathbf{P}_{<\omega}(\aleph_\alpha)| = \aleph_\alpha$.

Proposición. 12.4.7

1. $|\{f \subseteq \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha : f \text{ es aplicación } \wedge |dom(f)| \leq \aleph_0\}| = \aleph_\alpha$
2. $|\{f \subseteq \aleph_\alpha \times \aleph_\beta : f \text{ es aplicación } \wedge |dom(f)| \leq \aleph_0\}| = \aleph_\alpha\aleph_\beta$

Teorema. 12.4.8 $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

Corolario. 12.4.9

1. $\forall n \in \omega \ (|\mathbb{R}^n| = 2^{\aleph_0})$,
2. $|\mathbb{C}| = 2^{\aleph_0}$.
3. $|\{f : \ f : \omega \to \mathbb{R}\}| = 2^{\aleph_0}$.

4. $a \subseteq \mathbb{R}$ *numerable* $\implies$ $|\mathbb{R} - a| = 2^{\aleph_0}$.

5. $|\{r \in \mathbb{R} : r$ *irracional* $\}| = 2^{\aleph_0}$,

6. $|\{r \in \mathbb{R} : r$ *transcendente* $\}| = \aleph_0$.

7. $|\{f : \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}| = 2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$.

Nota. 12.4.10 *La* **Hipótesis del Continuo (CH)** *es*

$$\neg \exists a \subseteq \mathbb{R} \ (\aleph_0 < |a| < |\mathbb{R}|)$$

Capítulo 13

Elementos de Teoría combinatoria de conjuntos

13.1 Cofinalidad

Definición. 13.1.1 *Diremos que $x \subseteq \alpha$*

1. **Está acotado en** α *si*
$$(\exists \beta < \alpha)(\forall \gamma \in x)[\gamma < \beta].$$

2. **Es cofinal en** α *si*
$$(\forall \beta < \alpha)(\exists \gamma \in x)[\beta \leq \gamma].$$

Definición. 13.1.2

1. *Diremos que $f : \beta \to \alpha$ es* **cofinal** *si $rang(f)$ es cofinal en α.*

2. *La* **cofinalidad** *de α es $cf(\alpha) = inf\{\beta : (\exists f)[f : \beta \to \alpha \text{ cofinal}]\}$.*

Ejemplos. 13.1.3

1. *La función identidad en α es cofinal.*

2. $cf(\alpha) \leq \alpha$.

3. $cf(0) = 0$.

4. $cf(\alpha + 1) = 1$.

Proposición. 13.1.4

1. *Si α es límite, entonces cf(α) es límite.*

2. *cf(ω) $= \omega$.*

3. *cf($\omega + \omega$) $= \omega$.*

Proposición. 13.1.5

1. *Si $f : \alpha \to \beta$ es cofinal y $g : \beta \to \gamma$ es cofinal y no decreciente, entonces $g \circ f : \alpha \to \gamma$ es cofinal.*

2. *Existe $f :$ cf(α) $\to \alpha$ creciente y cofinal.*

3. *Si β es límite y $f : \alpha \to \beta$ es no decreciente y cofinal, entonces cf(α) $=$ cf(β).*

4. *cf(cf(α)) $=$ cf(α).*

5. *Si α es límite, entonces cf($\aleph_\alpha$) $=$ cf(α).*

13.2 Cardinales regulares

Definición. 13.2.1

1. *α es* **regular** *si α es límite y cf(α) $= \alpha$.*

2. *α es* **singular** *si α no es regular.*

Lema. 13.2.2 *Si α es límite, entonces cf(α) es un cardinal regular.*

Lema. 13.2.3 *(*HAUSDORFF 1914*) Si κ es un alef, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *κ es regular.*

2. *κ no es unión de menos de κ conjuntos de cardinal menor que κ.*

Corolario. 13.2.4 *(***AE***) (*HAUSDORFF 1908*) $\aleph_{\alpha+1}$ es regular.*

Capítulo 14

Exponenciación cardinal

14.1 Aritmética infinita

Proposición. 14.1.1 *(**AE**)*

1. $\prod_{i\in I} {\kappa_i}^{\lambda} = \left(\prod_{i\in I} \kappa_i\right)^{\lambda}$.
2. $\prod_{i\in I} \kappa^{\lambda_i} = \kappa^{\left(\sum_{i\in I} \lambda_i\right)}$.
3. *Asociativa: Si* $\{x_j : \ j \in J\}$ *es una partición de* I*, entonces*

$$\prod_{i\in I} \kappa_i = \prod_{j\in J} \left(\prod_{i\in x_j} \kappa_i\right)$$

Lema. 14.1.2 *(**AE**) Sea* κ *un cardinal infinito. Son equivalentes:*

1. κ *es singular.*
2. $(\exists\lambda < \kappa)(\exists\langle\kappa_i : i \in \lambda\rangle)\left[(\forall i < \lambda)[\kappa_i < \kappa] \wedge \kappa = \sum_{i<\lambda} \kappa_i\right]$.

Lema. 14.1.3 *(**AE**) Sea* λ *un cardinal infinito. Si* $\langle\kappa_i : i < \lambda\rangle$ *es una sucesión no decreciente de cardinales* ≥ 1*, entonces*

$$\prod_{i<\lambda} \kappa_i = (sup\{\kappa_i : \ i < \lambda\})^{\lambda}$$

Lema. 14.1.4 (**AE**) *Si κ es un cardinal infinito y $0 < \lambda < \kappa$, entonces*

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \sum_{\alpha<\kappa} |\alpha|^\lambda, & si\ cf(\kappa) > \lambda \\ \left(\sum_{\mu<\kappa} \mu^\lambda\right)^{cf(\kappa)}, & si\ cf(\kappa) \leq \lambda \end{cases}$$

Definición. 14.1.5 *La función gimel, $\gimel$, es la función sobre los alefs definida por $\gimel(\kappa) = k^{cf(\kappa)}$.*

Teorema. 14.1.6 (**AE**) *(Computación inductiva de ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta}$)*

$${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = \begin{cases} 2^{\aleph_\beta}, & si\ \ \alpha \leq \beta \\ {\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta}, & si\ \ \beta < \alpha \wedge (\exists\gamma < \alpha)[\aleph_\alpha \leq {\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta}] \\ \aleph_\alpha, & si\ \ \beta < \alpha \wedge (\forall\gamma < \alpha)[{\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha] \wedge \aleph_\beta < cf(\aleph_\alpha) \\ \gimel(\aleph_\alpha), & si\ \ \beta < \alpha \wedge (\forall\gamma < \alpha)[{\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha] \wedge \aleph_\beta \geq cf(\aleph_\alpha) \end{cases}$$

Corolario. 14.1.7 (**AE**) *(Fórmula recursiva de Hausdorff (*HAUSDORFF 1904*))*

$${\aleph_{\alpha+1}}^{\aleph_\beta} = {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta}\aleph_{\alpha+1}$$

14.2 Las funciones continuo y gimel

Lema. 14.2.1 (**AE**) *(*KÖNIG*) Si κ es un cardinal infinito, entonces $\kappa < \gimel(k)$*

Proposición. 14.2.2 (**AE**) *Si κ es un cardinal infinito, entonces $\kappa < cf(2^\kappa)$.*

Corolario. 14.2.3 (**AE**) *Si κ y λ son cardinales infinitos, entonces $\kappa < cf(\lambda^\kappa)$.*

Definición. 14.2.4 (**AE**) $\kappa^{\underset{\smile}{\lambda}} = sup\{\kappa^\mu : \mu < \lambda\}$.

Lema. 14.2.5 (**AE**) *Si κ es un cardinal infinito, entonces $(2^{\underset{\smile}{\kappa}})^{cf(\kappa)} = 2^\kappa$.*

Definición. 14.2.6 (**AE**)

1. *La función $\kappa \longmapsto 2^\kappa$ se llama la* **función continuo**.
2. *La función continuo es* **eventualmente constante en** κ $(\exists\mu < \kappa)[2^{\underset{\smile}{\kappa}} = 2^\mu]$.

Teorema. 14.2.7 *(***AE***)(*BUKOVSKY–HECHLER 1973*) Si κ un cardinal singular y la función continuo es eventualmente constante en κ, entonces existe un $\lambda < \kappa$ tal que $2^\kappa = 2^\lambda$.*

Teorema. 14.2.8 *(***AE***) Si κ es un cardinal infinito, entonces:*

$$2^\kappa = \begin{cases} \gimel(\kappa), & \textit{si } \kappa \textit{ es regular} \\ 2^{\overset{\kappa}{\smile}}, & \textit{si } \kappa \textit{ es singular y la función continuo es ev. cte. en } \kappa \\ \gimel(2^{\overset{\kappa}{\smile}}), & \textit{si } \kappa \textit{ es singular y la función continuo no es ev. cte. en } \kappa \end{cases}$$

14.3 Exponenciación cardinal con la hipótesis generalizada del continuo

Notas. 14.3.1

1. *Hipótesis del continuo* (**HC**)*:*
$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

2. *Hipótesis generalizada del continuo* (**HGC**)*:*
$$(\forall\alpha)[2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}].$$

Teorema. 14.3.2 *(***AE + HGC***)*

$$\aleph_\alpha{}^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha, & \textit{si } \aleph_\beta < cf(\aleph_\alpha) \\ \aleph_{\alpha+1} & \textit{si } cf(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta < \aleph_\alpha \\ \aleph_{\beta+1} & \textit{si } \aleph_\alpha \leq \aleph_\beta \end{cases}$$

Capítulo 15

Equivalencias del axioma de elección

15.1 Primeros resultados

Teorema. 15.1.1 *(**ZF**$^-$) (*Russell *1906,* Bernays *1941,* Zermelo *1904)) Son equivalentes:*

1. *El axioma de elección.*
2. *Para toda familia $\langle x_i : i \in y \rangle$*

$$(\forall i \in y)[x_i \neq \emptyset \to \prod_{i \in y} x_i \neq \emptyset$$

3. *Si $(\forall z, y \in x)[z \neq y \to z \cap y = \emptyset]$, entonces*

$$(\exists v)(\forall u)(\exists w)[u \in x \wedge u \neq \emptyset \to v \cap u = \{w\})$$

4. *Para toda relación r existe una aplicación f tal que:*

$$dom(f) = dom(r) \wedge (\forall x \in dom(f))[\langle x, f(x) \rangle \in r]$$

Teorema 15.1.2 **del buen orden** *(**ZF**$^-$) (*Zermelo *1904). Son equivalentes:*

1. *El axioma de elección.*
2. *Todo conjunto puede ser bien ordenado.*

Teorema. 15.1.3 *(**ZF**$^-$) (*Tarski *1924) Son equivalentes:*

1. *Todo conjunto puede ser bien ordenado.*
2. $(\forall x)[x \text{ finito } \leftrightarrow (\forall r)[\langle x, r\rangle \text{ buen orden} \rightarrow \langle x, r^{-1}\rangle \text{ buen orden}]]$.

Teorema 15.1.4 *(**ZF**) (*RUBIN *1960). Son equivalentes:*

1. *El axioma de elección*
2. *para todo ordinal α, $\mathbf{P}(\alpha)$ bien ordenable.*

15.2 Principios maximales

Teorema. 15.2.1 *(**ZF**$^-$) (*HAUSDORFF–ZORN*). Son equivalentes:*

1. *El axioma de elección.*
2. **Lema de Zorn.** *Si $\langle x, <\rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que:*

$$(\forall y \subseteq x)[\langle y, <\rangle \text{ totalmente ordenado } \rightarrow y \text{ tiene cota superior}],$$

entonces x tiene un elemento maximal.

Definición. 15.2.2 *El conjunto x* **tiene carácter finito** *si*

$$(\forall y)[y \in x \leftrightarrow (\forall z \subseteq y)[z \text{ finito } \rightarrow z \in x]]$$

Teorema 15.2.3 *($bf ZF^-$) (*TAKEUTI*). Son equivalentes:*

1. *El axioma de elección.*
2. $(\forall x)[x \text{ tiene carácter finito } \rightarrow (\exists y \in x)[y \subseteq -maximal]]$.

15.3 Cardinales

Teorema 15.3.1 *(**ZF**$^-$) (*HARTOGS *1915). Son equivalentes:*

1. *El axioma de elección*
2. $(\forall x)(\forall y)[x \prec y \vee y \prec x \vee y \sim x]$.

3. $(\forall \mathfrak{a}, b)[\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b} \vee \mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}]$.

Lema. 15.3.2 *Sean* $\mathfrak{a} \in \mathbf{Cn}$ *y* $\mathfrak{b} \in \mathbf{In}$.

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \implies \mathfrak{a} \leq \mathfrak{b} \vee \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$$

Teorema 15.3.3 *(*$\mathbf{ZF}^-$*) (*Tarski *1924). Son equivalentes:*

1. *El axioma de elección*
2. *Para cualquier cardinal infinito* $\mathfrak{a}$*,* $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$.

Bibliografía

Bibliografía

[1] DEVLIN, K.J.: *Fundamentals of Contemporary Set Theory. Springer–Verlag (1979).*

[2] ENDERTON, H.B.: *Elements of Set Theory. Academic Press (1977).*

[3] FEJER, P.A.; SIMOVICI, D.A.: *Mathematical Foundations of Computer Science. Vol I: Sets, Relations and Induction. Springer Verlag (1990).*

[4] GRATTAN–GUINNES, I.: (ED.) *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630–1910: Una introducción histórica. Alianza Ed. (1984).*

[5] HALMOS, P.R.: *Teoría intuitiva de los conjuntos. CECSA (1973).*

[6] HRBACEK, K.; JECH, T.: *Introduction to Set Theory. Marcel Dekker (1984).*

[7] JECH, T.: *Set Theory. Academic Press (1978).*

[8] LEVY, A.: *Basic Set Theory. Springer–Verlag (1979).*

[9] PÉREZ–JIMÉNEZ, M. DE J.: *Teoría de clases y conjuntos (Una introducción del cuerpo de los números reales). EDUNSA (1988).*

[10] PLA I CARRERA, J.: *Llions de Lgica Matemtica. Ed. PPU (1991).*

[11] ROITMAN, J.: *Introduction to Modern Set Theory. John Wiley (1990).*

[12] RUBIN, H.; RUBIN, J.E.: *Equivalents of the Axiom of Choice. North–Holland (1985).*

[13] RUIZ, J.: *Teoría de conjuntos. Apuntes manuscritos (1985).*

[14] SIGLER, L.E.: *Exercises in Set Theory. Van Nostrand (1972).*

[15] SHOENFIELD, J.R.: *Axioms of Set Theory. En: Handbook of Mathematical Logic (J. Barwise, ed.), pp. 321–344. North–Holland (1977).*

[16] SUPPES, P.: *Axiomatic Set Theory. Van Nostrand (1960).*

[17] TAKEUTI, G.; ZARING, W.M.: *Introduction to Axiomatic Set Theory. Springer–Verlag (1971).*

[18] VAUGHT, R.L.: *Set Theory: An Introduction. Birkhäuser (1985).*